



---

# DS 4 - SI

---

## Consignes

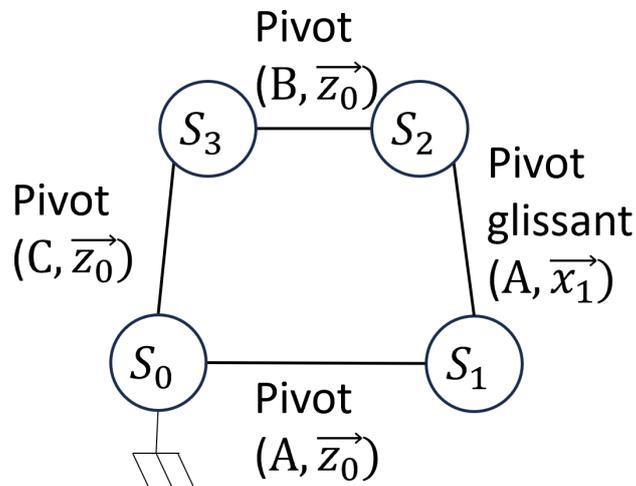
- Copies propres et bien présentées: encadrer vos résultats, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...
- Uniquement la calculatrice est autorisée.
- Les exercices sont indépendants.
- Ne pas oublier de rendre les Documents Réponses (DR), avec vos noms dessus. Même s'ils ne sont pas remplis.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Système mystère</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Batteur mélangeur</b>	<b>3</b>
2.1	Présentation . . . . .	3
2.2	Étude . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Manège de fête foraine</b>	<b>4</b>
3.1	Présentation . . . . .	4
3.2	Cahier des charges . . . . .	4
3.3	Commander élévation du manège . . . . .	5
3.3.a	Étude cinématique du système d'élévation . . . . .	5
3.4	Modéliser le mouvement des nacelles . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Commande en position d'un robot porte-sonde</b>	<b>7</b>
4.1	Mise en situation . . . . .	7
4.2	Commande en position du robot porte-sonde . . . . .	8
4.2.a	Modélisation de l'axe 1 . . . . .	8
4.2.b	Synthèse de la commande : boucle de vitesse . . . . .	11

# 1. Système mystère

La modélisation donne le graphe de liaison suivant :



De plus, le paramétrage est le suivant :

- On associe à  $S_0$  le repère  $\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et on pose  $\overrightarrow{AC} = L\vec{x}_0$ .
- La liaison entre  $S_1$  et  $S_0$  est paramétrée par l'angle  $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .
- La liaison entre  $S_2$  et  $S_1$  est paramétrée par le vecteur  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\vec{x}_1$ .
- La liaison entre  $S_3$  et  $S_2$  est paramétrée par l'angle  $\theta_{31} = (\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$ . On pose  $\overrightarrow{CB} = R\vec{x}_3$ .
- La liaison entre  $S_3$  et  $S_0$  est paramétrée par l'angle  $\theta_{30} = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$ .

**Question 1:** Tracer les figures de changement de base.

**Question 2:** Réaliser le schéma cinématique du système.

**Question 3:** Écrire une relation reliant  $\theta_{30}$  aux grandeurs  $\lambda(t)$ ,  $L$  et  $R$ .

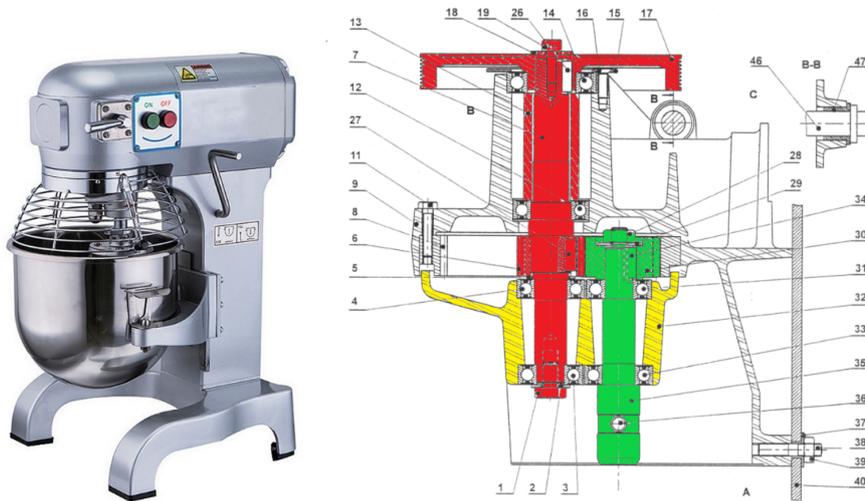
**Question 4:** Exprimer  $\theta_{10}$ , en fonction de  $\theta_{30}$ , de  $R$  et de  $L$ .

**Question 5:** (Bonus) Quel est le système mystère? *Indice : vous l'avez déjà rencontré.*

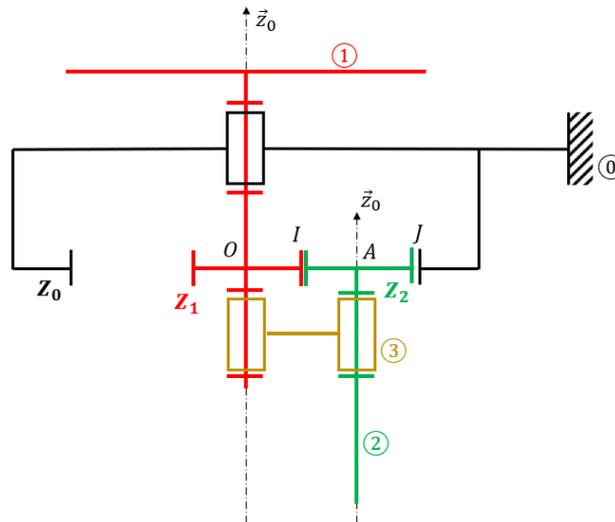
## 2. Batteur mélangeur

### 2.1 Présentation

Le système étudié est le réducteur et le support d'un batteur mélangeur utilisé pour le malaxage des pâtes industrielles.



On donne également son schéma cinématique.



### 2.2 Étude

**Question 6:** Réaliser le graphe de liaison.

**Question 7:** Déterminer le rapport de réduction  $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$ .

**Question 8:** En utilisant l'hypothèse de roulement sans glissement, en  $I$  ou en  $J$ , déterminer la relation entre  $\omega_{2/3}$  et  $\omega_{1/0}$  et du nombre de dents, noté  $Z_i$  avec  $i \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

### 3. Manège de fête foraine

#### 3.1 Présentation

Le manège considéré est du même type que celui représenté ci-contre. Ce type d'attraction a pour but de faire subir aux passagers des accélérations qui ne leur sont pas familières. Les nacelles, transportant les amateurs de sensations, sont suspendus par le haut et peuvent basculer de gauche à droite. Une piste circulaire bosselée (dos d'âne) déplace les nacelles verticalement. Les effets psychologiques des accélérations varient selon leur intensité, leur durée, leur direction et leur sens d'application.



Ce sont les oreilles internes qui informent les passagers sur les accélérations auxquelles ils sont soumis ; c'est pourquoi les accélérations « ressenties » sont caractérisées par l'accélération au niveau de la tête du passager.

#### 3.2 Cahier des charges

Le cahier des charges du manège est donné par le diagramme des exigences en Figure 1. Le Manège possède les caractéristiques suivantes :

- Vitesse angulaire maximale de l'ensemble : 14 tours par minute;
- Accélération verticale maximale dû à la piste bosselée  $1,6 \text{ m.s}^{-2}$ .

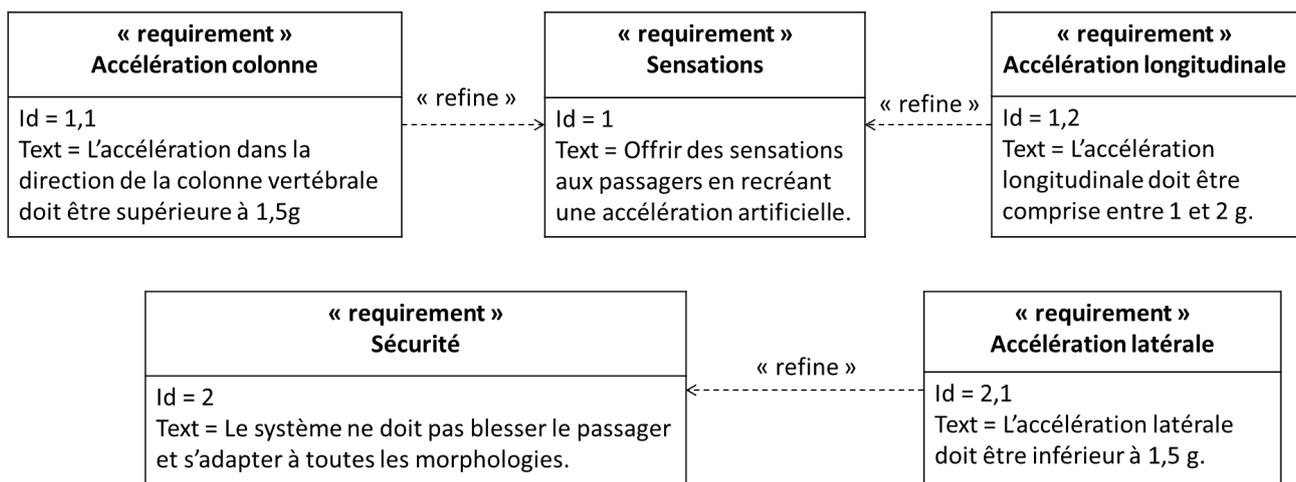


FIGURE 1 – Diagramme des exigences

*L'objectif du travail proposé est de vérifier si la cinématique et les caractéristiques du manège permettent de valider le cahier des charges.*

### 3.3 Commander élévation du manège

#### 3.3.a Étude cinématique du système d'élévation

Pour obtenir les accélérations verticales  $\ddot{\lambda}$  du bras  $S_2$ , celui-ci est en contact avec une piste bosselée. Ceci permet de relier le mouvement de translation  $\lambda$  du bras à la rotation du corps du manège  $\alpha$ . Le système d'entraînement du manège est défini sur le schéma cinématique Figure 2.

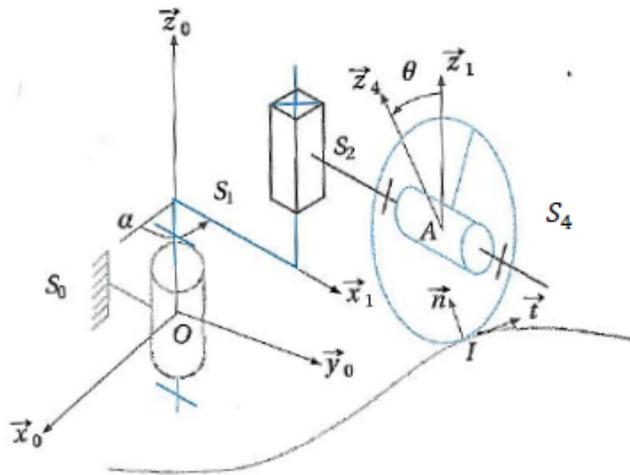


FIGURE 2 – Schéma cinématique du système d'élévation

La roue  $S_4$ , en liaison pivot autour de l'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le bras  $S_2$ , roule sur la piste au point de contact noté  $I$ . On note  $\theta = (\vec{z}_1, \vec{z}_4) = (\vec{y}_1, \vec{y}_4)$  l'angle de rotation de la roue. On pose  $\vec{n}$  la normale à la surface de contact et  $\vec{t}$  la tangente au contact. On note  $\gamma = (\vec{z}_1, \vec{n}) = (\vec{y}_1, \vec{t})$  l'angle entre la normale au contact et la verticale. Les rotations  $\theta$  et  $\gamma$  sont font donc par rapport à  $\vec{x}_1$ . On a également  $\overrightarrow{OA} = L\vec{x}_1 + \lambda\vec{z}_0$  et  $\overrightarrow{IA} = R\vec{n}$ .

**Question 9:** Donner les figures de changement de base pour les angles  $\theta$ ,  $\gamma$  et  $\alpha$ , ainsi que le graphe de liaison du système.

**Question 10:** Écrire les torseurs cinématiques  $\{\mathcal{V}_{1/0}\}$  et  $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ , puis calculer  $\overrightarrow{V_{I \in 2/0}}$ .

**Question 11:** Écrire le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{4/2}\}$  puis calculer  $\overrightarrow{V_{I \in 4/2}}$ .

**Question 12:** Définir ET déterminer la vitesse de glissement  $\overrightarrow{V_{I \in 4/0}}$  au point de contact  $I$  entre la roue  $S_4$  et la piste profilée liée au bâti  $S_0$ .

**Question 13:** Quelle contrainte doit-on avoir sur  $\overrightarrow{V_{I \in 4/0}}$  afin de garantir le contact de la roue sur la piste? Attention pour l'instant il n'est pas prouvé qu'il y a roulement sans glissement et l'hypothèse n'a pas été faite. En déduire une relation entre  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\gamma}$ .

**Question 14:** Exprimer dans la base  $B_1$  les relations obtenues en considérant qu'il y a roulement sans glissement au point  $I$ .

**Question 15:** Si on considère que  $\alpha \neq 0$  (le manège doit tourner!), l'hypothèse de roulement sans glissement imposerait alors quelle condition sur la piste?

### 3.4 Modéliser le mouvement des nacelles

On s'intéresse maintenant au mouvement d'une nacelle. Le système peut être modélisé par le schéma cinématique présenté Figure 3.

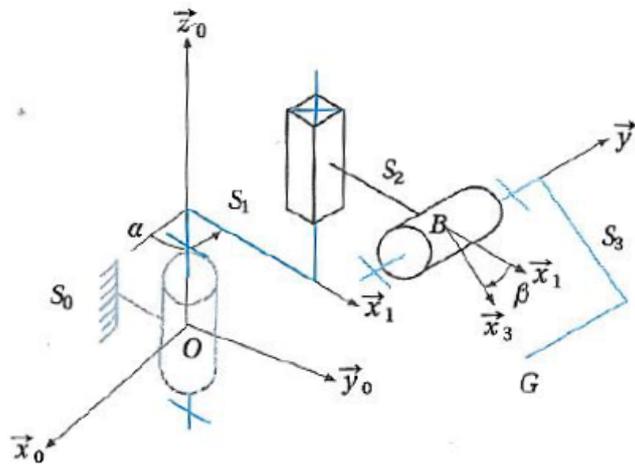


FIGURE 3 – Schéma cinématique d'une nacelle

Le système est constitué de quatre solides. On associe la base  $B_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  au solide  $S_i$  pour  $i \in \{0; 1; 2; 3\}$ . Le corps du manège  $S_1$  est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti  $S_0$ . On pose  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ . Le bras  $S_2$  est en liaison glissière de direction  $\vec{z}_0$  avec le solide  $S_1$ . La nacelle  $S_3$  est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{y}_1)$  avec le solide  $S_2$ . On pose  $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$ . La position du point  $B$  est donnée par  $\overrightarrow{OB} = \lambda \vec{z}_0 + a \vec{x}_1 + b \vec{x}_2$  avec  $a$  et  $b$  des constantes. Le point  $G$ , centre de gravité de l'ensemble {passagers, nacelle}, est repéré par  $\overrightarrow{BG} = l \vec{x}_3$  avec  $l$  constante.

**Question 16:** Que dire de la base  $B_2$  associée au repère  $R_2$ ? Donner alors une expression clarifiée de  $\overrightarrow{OB}$ .

**Question 17:** Représenter la figure de changement de base de l'angle  $\beta$ .

**Question 18:** Déterminer l'expression de  $\overrightarrow{V_{g \in 3/0}}$ .

L'accélération ressentie dans la direction de la colonne vertébrale est donnée par

$$a_r = (g \vec{z}_0 + \overrightarrow{\Gamma_{G \in 3/0}}) \cdot \vec{x}_3$$

**Question 19:** Calculer cette accélération ressentie  $a_r$ .

La nacelle se stabilise à une inclinaison constante  $\beta_0$ . Les dimensions du manège sont les suivantes :  $a = 4m$ ,  $b = 1m$ ,  $l = 0,5m$ . La vitesse angulaire maximale de l'ensemble est de 14 tours par minute et l'accélération verticale maximale due à la piste bosselée est  $\ddot{\lambda} = 1,6ms^{-2}$ .

**Question 20:** Calculer l'accélération ressentie pour l'angle d'inclinaison de la nacelle maximal  $\beta_0 = \frac{\pi}{4}$ . Conclure quant au cahier des charges.

## 4. Commande en position d'un robot porte-sonde

### 4.1 Mise en situation

Grâce à la télé-échographie robotisée, il devient possible de réaliser une échographie sur un patient situé sur un site isolé (appelé site patient, **(a)** de la Figure 4), alors même que le spécialiste en imagerie médicale se trouve sur un site distant de celui où est pratiqué l'examen (appelé site expert, **(b)** de la Figure 4).



FIGURE 4 – Principe de la télé-échographie

La Figure 5 décrit le robot porte-sonde constitué :

- d'une structure porteuse 0;
- d'un module de rotation, composé des sous-ensembles 1, 2 et 3, permettant d'orienter la sonde en lui imposant trois rotations suivant les axes 1 à 3;
- du porte-sonde 4 sur lequel est fixé la sonde échographique S. La translation suivant l'axe 4 permet de contrôler l'effort de contact sonde/peau du patient.

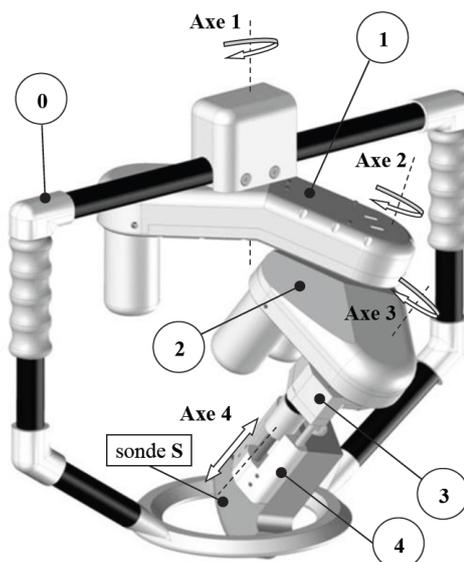


FIGURE 5 – Robot porte-sonde

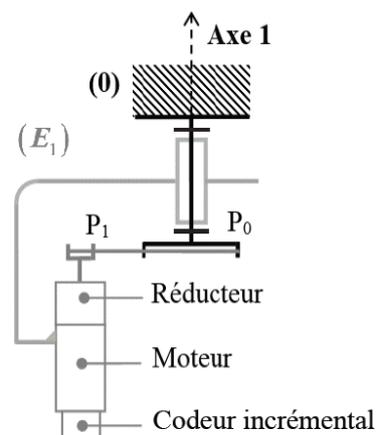


FIGURE 6 – Chaîne cinématique associée à l'axe 1

## 4.2 Commande en position du robot porte-sonde

On se limite ici à l'étude de la commande du premier axe, dont la structure est présentée en Figure 6. Le principe associé à cette commande est décrit par la Figure 7. La structure de commande de la position angulaire  $\theta_1$  est composée de deux boucles imbriquées disposant chacune d'un réseau correcteur :

- une boucle interne de vitesse, gérée par le variateur ;
- une boucle externe de position, gérée par la carte d'axes.

Un codeur incrémental, solidaire de l'axe moteur permet après traitement numérique d'obtenir une image de la position angulaire  $\theta_1$  et de la vitesse angulaire  $\omega_1$  de l'axe 1, grandeurs mises en oeuvre au niveau des deux boucles d'asservissement. La consigne de position est élaborée par la carte d'axes, par intégration du profil de vitesse généré.

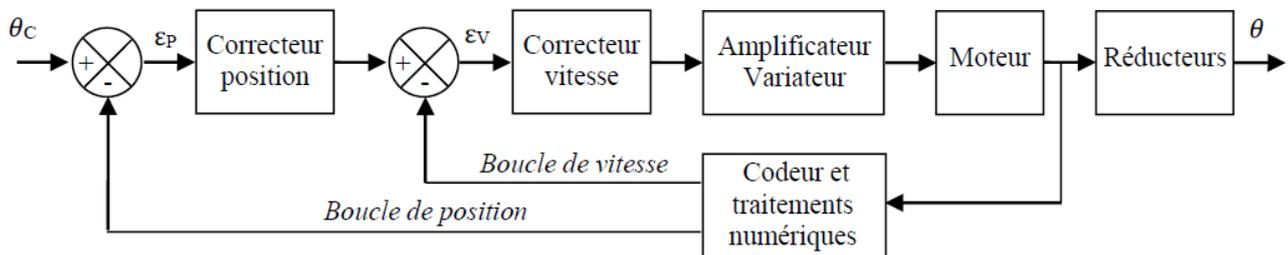


FIGURE 7 – Structure de l'asservissement d'un axe

### 4.2.a Modélisation de l'axe 1

L'objectif est d'élaborer un modèle de connaissance de l'axe 1 et de réaliser la synthèse de la commande.

#### Modélisation de la motorisation

La motorisation de l'axe 1 est réalisée à l'aide d'un moteur électrique à courant continu et aimants permanents, dont le comportement peut être modélisé par les équations suivantes :

$$u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \qquad e(t) = k_e \omega_m(t)$$

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) \qquad C_m(t) = k_c i(t)$$

Avec :

$u(t)$  : tension aux bornes du moteur (en V)

$e(t)$  : force contre-électromotrice (en V)

$i(t)$  : intensité (en A)

$\omega_m(t)$  : vitesse de rotation du moteur (en rad/s)

$C_m(t)$  : couple moteur (en Nm)

$C_r(t)$  : le couple résistant (perturbation) (en Nm)

$J_{eq}$  : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur ( $8,6 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$ )

$R$  : résistance électrique du moteur ( $4,1 \Omega$ )

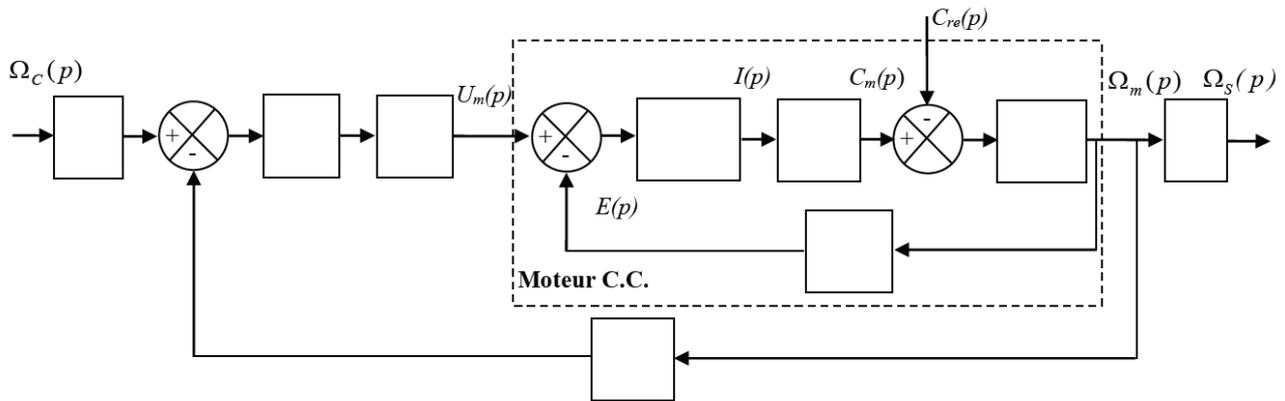
$k_e$  : constante de force contre-électromotrice ( $1,6 \cdot 10^{-2} \text{ V/(rad/s)}$ )

$k_c$  : constante de couple ( $1,6 \cdot 10^{-2} \text{ Nm/A}$ )

$L$  : inductance de l'induit ( $0,18 \text{ mH}$ )

**Question 21:** Passer les équations précédentes dans le domaine de Laplace, on considère les conditions initiales nulles.

On donne le schéma-bloc incomplet suivant :



**Question 22:** Compléter la partie *Moteur C.C.* de ce schéma-bloc. Recopier le sur votre copie ou penser à détacher la feuille et la rendre avec votre copie.

**Question 23:** Déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert  $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$  quand  $C_r(p) = 0$ , et  $H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$  quand  $U(p) = 0$ , sous forme canonique.

On pose  $\tau_e = \frac{L}{R}$  et  $\tau_m = \frac{RJ_{eq}}{k_e k_c}$ , respectivement constantes de temps électrique et électromécanique du moteur à courant continu.

**Question 24:** Déterminer les valeurs numériques des constantes de temps  $\tau_e$  et  $\tau_m$ . Une constante de temps peut-elle être négligée devant l'autre ?

**Question 25:** Montrer, en précisant l'expression de  $K_m$ , que  $H_1(p)$  peut être simplifiée par :

$$H_1(p) = \frac{K_m}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p)}$$

**Modélisation de la boucle de vitesse**

La Figure 8 présente la structure de la boucle de vitesse associée à la commande de l'axe 1.

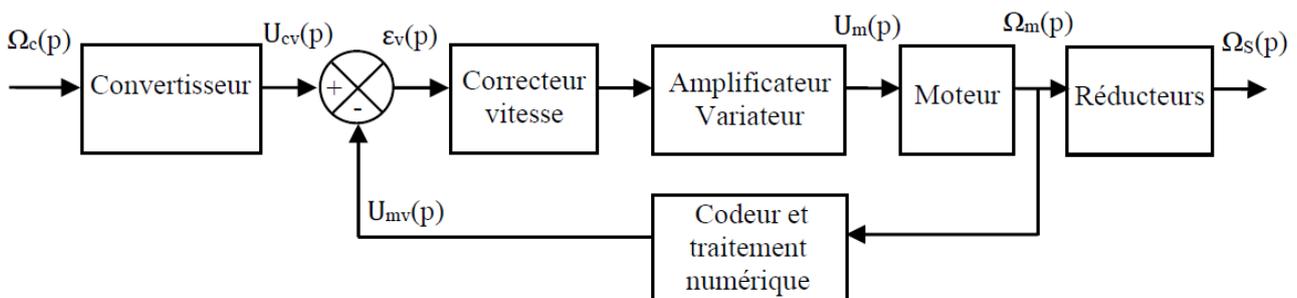


FIGURE 8 – Asservissement en vitesse d'un axe

On donne les notations suivantes pour les gains des différents composants intervenant dans la commande de l'axe 1 :

- o Convertisseur :  $K_{conv}$  ;
- o Correcteur vitesse :  $C_v(p)$  ;
- o Amplificateur/variableur :  $K_A = 9,4$  ;
- o Codeur et traitement :  $K_{vit} = 8,3 \cdot 10^{-3} V / (rad/s)$  ;
- o Réducteurs :  $K_R$  ;

La partie "réducteurs" est composée d'un réducteur à train simple ainsi que d'un système de poulie. La poulie  $P_0$  a pour diamètre  $D_0 = 42mm$  et la poulie  $P_1$  a pour diamètre  $D_1 = 13mm$ . Le réducteur quant à lui est présenté sur la Figure 9.

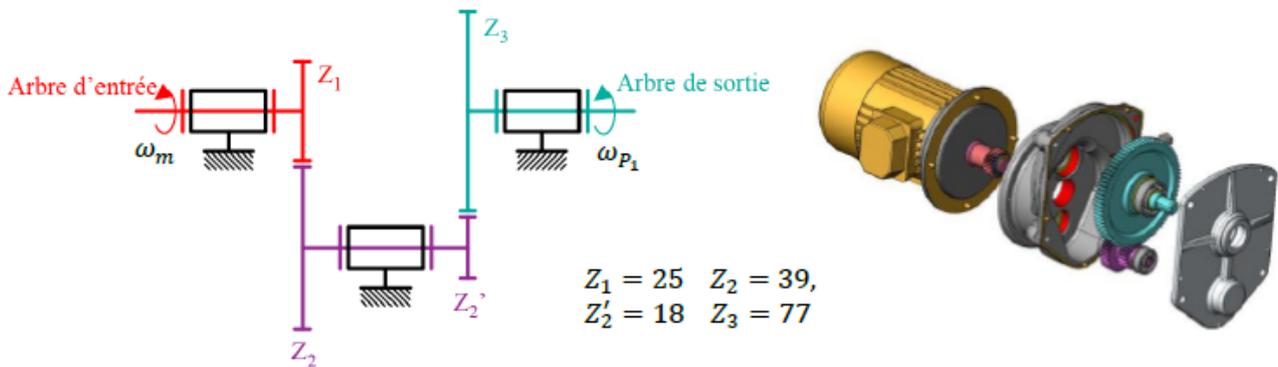


FIGURE 9 – Réducteur à engrenage du moteur

**Question 26:** Déterminer les rapports de réduction  $r_e = \frac{\omega_{P_1}}{\omega_m}$  du train d'engrenage et  $r_p = \frac{\omega_{P_1/E_1}}{\omega_{P_0/E_1}}$  des poulies et en déduire l'expression et la valeur numérique de  $K_r$ .

**Question 27:** Déterminer l'expression du gain  $K_{conv}$  ainsi que sa valeur numérique et unité associée.

**Question 28:** Compléter le schéma-bloc à trous précédent en y faisant figurer les fonctions de transfert sous forme littérale dans le domaine de Laplace avec des conditions initiales nulles.

On pourrait montrer que le schéma-bloc peut se ramener au schéma à retour unitaire de la Figure 10, avec  $G_1(p) = \frac{k_c}{R} \frac{1}{1 + \tau_e p}$ ,  $G_2(p) = \frac{R}{k_c} \frac{1}{1 + \tau_m p}$  et  $K = K_{vit} K_A K_m$ .

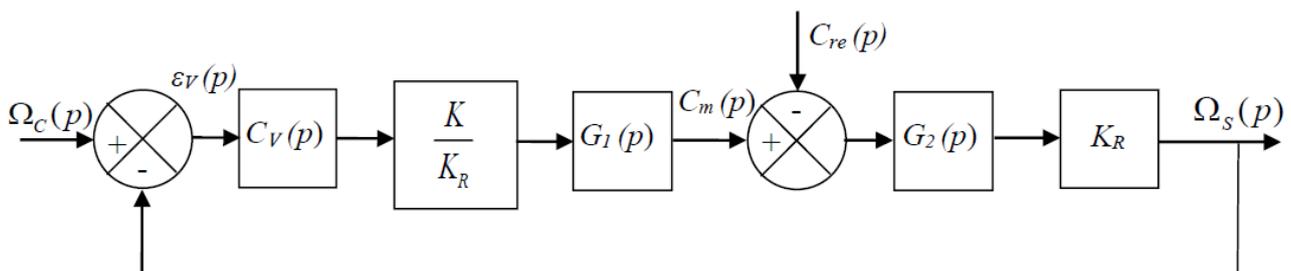


FIGURE 10 – Schéma-bloc équivalent pour la boucle de vitesse

Pour la suite nous prendrons  $\tau_m = 0,14s$ ,  $\tau_e = 10^{-4}s$  et  $K = 4,9$ .

**Question 29:** A partir du schéma-bloc à retour unitaire de la Figure 10, déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(p) = \frac{\Omega_s(p)}{\epsilon_V(p)}$  en fonction de  $C_v(p)$ ,  $\tau_e$ ,  $\tau_m$  et  $K$ .

#### 4.2.b Synthèse de la commande : boucle de vitesse

Le système est à présent considéré en l'absence de perturbation (étude en suivi de consigne). Le correcteur de la boucle de vitesse est un correcteur Proportionnel Intégral, de fonction de transfert :

$$C_V(p) = K_i \frac{1 + \tau_m p}{\tau_m p}$$

**Question 30:** Déterminer, en fonction des paramètres  $K_i$ ,  $\tau_e$ ,  $\tau_m$  et  $K$ , l'expression littérale de la fonction de transfert en vitesse sous la forme canonique d'un système du second ordre. Préciser la valeur de  $K_v$ , le gain de cette fonction, et les expressions littérales du taux d'amortissement  $\xi$  et de la pulsation propre  $\omega_0$ .

Le gain  $K_i$  du correcteur est fixé de manière à obtenir la réponse la plus rapide sans dépassement en boucle fermée. On rappelle que pour un modèle du second ordre, la réponse la plus rapide sans dépassement est obtenue pour un facteur d'amortissement  $\xi = 1$ , valeur pour laquelle on a  $t_{5\%}\omega_0 = 5$ .

**Question 31:** Déterminer l'expression de  $K_i$  ainsi que sa valeur numérique. Déterminer la valeur du temps de réponse  $t_{5\%}$  de la boucle de vitesse pour cette valeur de  $K_i$ .