Correction DM 5 - SI

Consignes

- Copies propres et bien présentées: $\boxed{\text{encadrer vos résultats}}$, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...
- **Aucun retard ne sera accepté.**
- Les exercices sont indépendants.
- Ne pas oublier de rendre les Documents Réponses (DR), avec vos noms dessus. Même s'ils ne sont pas remplis.

Table des matières

1 Réglage d'un correcteur proportionnel **2**

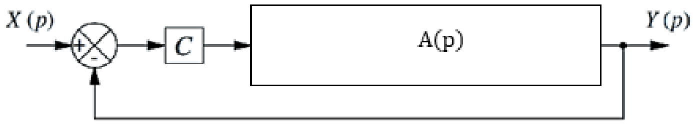
1.1 Lecture de Bode 2

1.2 Réglage des marges 5

2 Réalisation d'un diagramme de Bode **7**

1. Réglage d'un correcteur proportionnel

On considère le système asservi à retour unitaire dont le schéma-bloc est donné ci-dessous :



Avec $C(p) = 1$

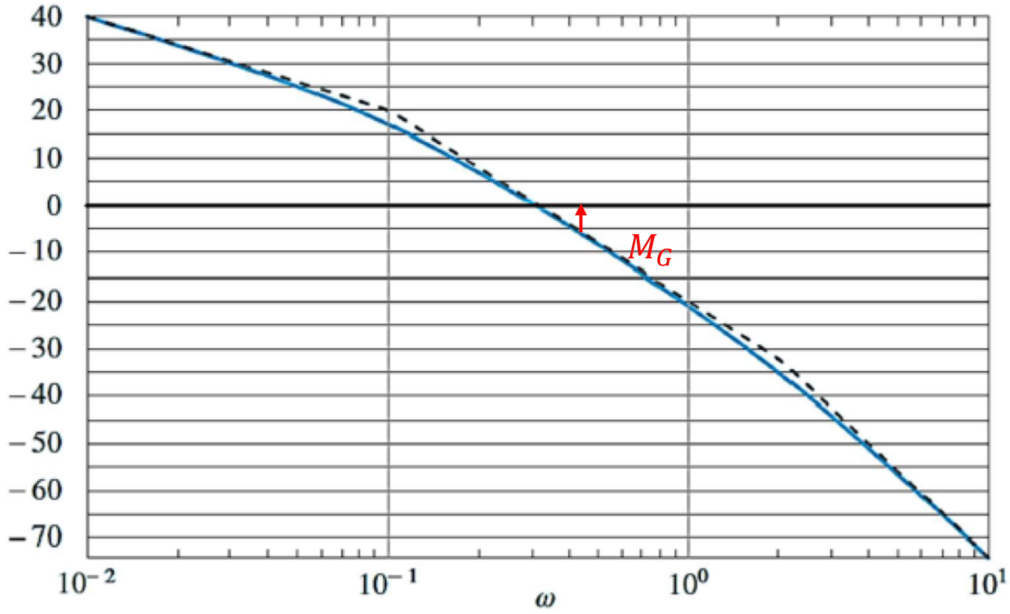
1.1 Lecture de Bode

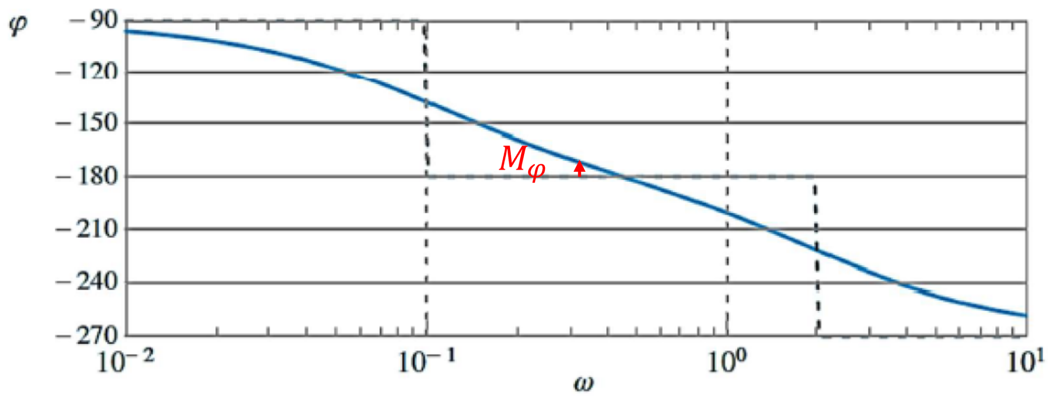
Question 1: Identifier la fonction de transfert en boucle ouverte $A(p)$ à partir du diagramme de Bode suivant ($C(p) = 1$).

Réponse 1: On remarque que la phase commence à $-90°$, il y a donc un intégrateur. Ensuite nous avons deux pulsations de coupure ($\omega_{c_1} = 0,1 rad/s$ et $\omega_{c_2} = 2 rad/s$), diminuant la phase de $-90°$ chacune, il s'agit donc de deux premiers ordre ; ce qui est confirmé par les pentes du diagramme de gain. On a alors $\boxed{A(p) = \frac{K}{p} \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_{c_1}} p} \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_{c_2}} p}}$

Il reste à déterminer le gain K : pour $\omega = 10^{-2} rad/s$ le gain vaut $40 dB$, pour cette pulsation, seul l'intégrateur entre en compte. Il vient alors :
$G_{dB}(A(j\omega)) = 20 log(K) - 20 log(\omega)$ soit $40 = 20 log(K) - 20 log(10^{-2})$

D'où $K = 1$. Enfin : $\boxed{A(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{1}{0,1} p} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} p}}$.





Question 2: En traçant sur le diagramme, déterminer les valeurs des marges de phase et de gain. En déduire que le système est stable.

Réponse 2: Les marges sont tracées sur les diagrammes ci-dessus. On trouve graphiquement $\boxed{M_\varphi \simeq 10°}$ et $\boxed{M_G \simeq 7dB}$. Les deux marges sont positives donc le système est stable.

Question 3: Déterminer analytiquement la marge de phase M_φ.

Réponse 3: La marge de phase est définie par $M_\varphi = \varphi(A(j\omega_{0dB})) - (-180°)$. Il convient dans un **premier temps de déterminer** ω_{0dB}.
Graphiquement, la pulsation ω_{0dB} pour laquelle le gain vaut $0dB$ est $0,3rad/s$. Ce qui est supérieur à $\omega_{c_1} = 0,1rad/s$ mais inférieur à $\omega_{c_2} = 2rad/s$, on peut alors approximer la fonction par : $\hat{A}(p) = \dfrac{1}{p}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{0,1}p}$.
Cherchons analytiquement la valeur de ω_{0dB}. Cette pulsation est atteinte pour un gain nul, donc pour :

$$\left|\hat{A}(j\omega_{0dB})\right| = 1$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\omega_{0dB}}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\omega_{0dB}^2}{\omega_{c_1}^2}}} = 1$$
$$\Longleftrightarrow \omega_{0dB}^4\frac{1}{\omega_{c_1}^2} + \omega_{0dB}^2 - 1 = 0$$

Avec le changement de variable $X = \omega_{0dB}^2$, on a alors une équation du second degré dont la résolution donne $X_1 = 0,095$ et $X_2 < 0$, d'où $\boxed{\omega_{0dB} = 0,31rad/s}$.
Ensuite, **on peut évaluer la phase pour cette pulsation, nous pouvons revenir à la fonction non approximée :**

$$\varphi(A(j\omega_{0dB})) = arg(\frac{1}{j\omega_{0dB}}) - arg(1+j\frac{\omega_{0dB}}{\omega_{c_1}}) - arg(1+j\frac{\omega_{0dB}}{\omega_{c_2}})$$
$$\varphi(A(j\omega_{0dB})) = -90 - arctan(\frac{\omega_{0dB}}{\omega_{c_1}}) - arctan(\frac{\omega_{0dB}}{\omega_{c_2}})$$
$$\varphi(A(j\omega_{0dB})) = -171°$$

Il vient alors : $\boxed{M_\varphi = 9°}$, ce qui relativement proche de la valeur trouvée graphiquement.
Remarque : Si on continue avec la fonction approximée :

$$\varphi(\hat{A}(j\omega_{0dB})) = arg(\frac{1}{j\omega_{0dB}}) - arg(1+j\frac{\omega_{0dB}}{\omega_{c_1}})$$
$$\varphi(\hat{A}(j\omega_{0dB})) = -90 - arctan(\frac{\omega_{0dB}}{\omega_{c_1}})$$

$\varphi(\hat{A}(j\omega_{0dB})) = -162°$, donc $M_\varphi = 18°$.

Question 4: Déterminer analytiquement la marge de gain $M_{G_{dB}}$.

Réponse 4: La marge de gain est définie par $\underline{M_{G_{dB}} = 0 - G(A(j\omega_{180°}))}$. Il convient dans un **premier temps de déterminer** $\omega_{180°}$.

$\varphi(A(j\omega_{180°})) = -180°$

Or $\varphi(A(j\omega_{180°})) = arg(\frac{1}{j\omega_{180°}}) - arg(1 + j\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_1}}) - arg(1 + j\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_2}})$

Soit $-180 = -90 - arctan(\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_1}}) - arctan(\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_2}})$

$\iff 90 = arctan(\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_1}}) + arctan(\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_2}})$

Or $\lim\limits_{x \to 90} tan(x) = \infty$ donc au passage à la tangente et à la limite il vient :

$\lim tan(arctan(\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_1}}) + arctan(\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_2}})) = \infty$

Or $tan(arctan(\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_1}}) + arctan(\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_2}})) = \frac{\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_1}} + \frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_2}}}{1 - \frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_1}}\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_2}}}$

Comme $\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_1}} > 0$ et $\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_2}} > 0$, afin de respecter la limite vers ∞, il faut :

$1 - \frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_1}}\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_2}} = 0$

Enfin comme $\omega_{180°} > 0$, on conclut $\boxed{\omega_{180°} = \sqrt{\omega_{c_1}\omega_{c_2}}}$=0,45 rad/s. *Il y a d'autres méthodes de résolutions possibles.*

Ensuite, **on peut évaluer le gain pour cette pulsation** :

$G(A(j\omega_{180°})) = -20log(\omega_{180°}) - 10log(1 + (\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_1}})^2) - 10log(1 + (\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_2}})^2)$

$\underline{G(A(j\omega_{180°})) = -6,44dB}$.

D'où $\boxed{M_{G_{dB}} = 6,44dB}$.

Remarque : En prenant la fonction approximée, on trouve $M_{G_{dB}} = 6,23dB$, on voit que l'influence sur le réel du second premier ordre est très faible, car sa fréquence de coupure est supérieure à la pulsation à $-180°$, et relativement éloignée.

Question 5: Si le système asservi est soumis à une entrée en échelon d'amplitude E_0, donner l'erreur statique.

Réponse 5: La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$FTBO(p) = C(p).A(p)$

$FTBO(p) = \frac{1}{p}\frac{1}{1 + \frac{1}{0,1}p}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}p}$

Cette fonction est de classe 1, on sait que l'erreur statique (donc l'erreur pour une entrée échelon) est nulle.

1.2 Réglage des marges

Le cahier des charges du système requiert une marge de gain de $12dB$ et une marge de phase de 40°. Pour cela nous ajoutons un correcteur proportionnel pur $C(p) = C$.

Question 6: Déterminer la valeur de C, gain pur, permettant de satisfaire l'exigence de marge de phase.

Réponse 6: Un gain pur n'impacte que le gain, la phase reste inchangée. Un correcteur proportionnel (gain pur) augmente ou diminue le gain sans changer sa forme, le seul impact de C pour la marge de phase est de changer la valeur de ω_{0dB}. D'après la définition de la marge de phase, pour avoir une marge de phase de 40°, il faut une phase de −140° pour ω_{0dB}.
La méthode est donc la suivante :

1. Déterminer la pulsation $\omega_{140°}$ correspondant à une phase de −140° ;
2. Calculer le gain pour cette pulsation ;
3. Résoudre C pour faire en sorte que cette pulsation soit ω_{0dB}.

1. Déterminons $\omega_{140°}$:
$\varphi(A(j\omega)) = -140°$
Or $\varphi(A(j\omega)) = arg(\frac{1}{j\omega}) - arg(1+j\frac{\omega}{\omega_{c_1}}) - arg(1+j\frac{\omega}{\omega_{c_2}})$
D'où $\varphi(A(j\omega_{140°})) = arg(\frac{1}{j\omega_{140°}}) - arg(1+j\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_1}}) - arg(1+j\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_2}})$
$\iff -140 = -90 - arctan(\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_1}}) - arctan(\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_2}})$
$\iff tan(50) = \dfrac{\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_1}} + \frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_2}}}{1 - \frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_1}}\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_2}}}$
$\iff \omega_{140°}^2\left(\frac{tan(50)}{\omega_{c_1}\omega_{c_2}}\right) + \omega_{140°}\left(\frac{1}{\omega_{c_1}} + \frac{1}{\omega_{c_2}}\right) - tan(50) = 0$
La résolution de ce polynôme (avec $\omega_{140°} > 0$) donne $\boxed{\omega_{140°} = 0,10 rad/s}$.
2. Calculons le gain pour cette pulsation :
$G(A(j\omega_{140°})) = 20log(C) - 20log(\omega_{140°}) - 20log\left(\sqrt{1+(\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_1}})^2}\right) - 20log\left(\sqrt{1+(\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_2}})^2}\right)$
3. On résout C pour avoir $\omega_{140°} = \omega_{0dB}$:
$20log(C) - 20log(\omega_{140°}) - 20log\left(\sqrt{1+(\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_1}})^2}\right) - 20log\left(\sqrt{1+(\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_2}})^2}\right) = 0$
$\iff log(C) = log(\omega_{140°}) + log\left(\sqrt{1+(\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_1}})^2}\right) + log\left(\sqrt{1+(\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_2}})^2}\right)$
$\iff \boxed{C = 10^{log(\omega_{140°})+log\left(\sqrt{1+(\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_1}})^2}\right)+log\left(\sqrt{1+(\frac{\omega_{140°}}{\omega_{c_2}})^2}\right)}} = 0,14.$
Remarque : On peut également déterminer C graphiquement. Quand la phase vaut −140°, le gain vaut $15dB$, pour avoir une marge de phase de 40°, on veut que ce gain soit nul, il faut donc que l'influence de C soit de diminuer le gain de $15dB$. Soit :

$20log(C) = -15 \iff C = 10^{\frac{-15}{20}} \simeq 0,18$
La différence est due à la lecture graphique.

Question 7: Déterminer la valeur de C, gain pur, permettant de satisfaire l'exigence de marge de gain.

Réponse 7: En partant de la définition de la marge de gain, pour avoir une marge de gain de $12dB$, il faut une valeur de gain de $-12dB$ quand la phase vaut $-180°$.
De même que précédemment, on sait qu'un correcteur proportionnel n'influe que sur le gain, donc la pulsation $\omega_{180°}$ pour laquelle la phase vaut $-180°$ est inchangée et vaut $\omega_{180°} = \sqrt{\omega_{c_1}\omega_{c_2}} = 0,45rad/s$. Il suffit donc de calculer le gain en prenant en compte le gain pur du correcteur :
$0 - G(A(j\omega_{180°})) - G(C) = 12dB$
$\iff 20log(C) = -G(A(j\omega_{180°})) - 12$
$\iff log(C) = log(\omega_{180°}) + log\left(\sqrt{1 + (\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_1}})^2}\right) + log\left(\sqrt{1 + (\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_2}})^2}\right) - \frac{12}{20}$
$\iff \boxed{C = 10^{log(\omega_{180°})+log\left(\sqrt{1+(\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_1}})^2}\right)+log\left(\sqrt{1+(\frac{\omega_{180°}}{\omega_{c_2}})^2}\right)-\frac{12}{20}}}$=0,53.
Remarque : On peut également le déterminer graphiquement. On avait relevé une marge de gain de $7dB$ sans correction. Pour satisfaire le cahier des charges il faut atteindre $12dB$, donc l'ajout du correcteur doit diminuer le gain de $12-7 = 5dB$, soit $20log(C) = -5 \iff C = 10^{-0,25} = 0,56$.

Question 8: En déduire la valeur de C qui permet de satisfaire simultanément les deux exigences.

Réponse 8: On peut simplement prendre une des deux valeurs de C et faire les applications numériques. Sinon, avec un peu de réflexion : la valeur de C demandant de diminuer le plus le gain satisfait à la fois le critère sur la marge de phase et celui sur la marge de gain. C'est à dire la plus petite valeur de C. Ainsi $C = 0,14$ permet de satisfaire simultanément les deux exigences.

2. Réalisation d'un diagramme de Bode

Soit la fonction :

$$H(p) = \frac{2}{p(1 + \frac{0,4}{20}p + \frac{1}{400}p^2)}$$

Question 9: Tracer le diagramme asymptotique en faisant clairement apparaître les pentes, valeurs remarquables du gain, de la phase et des pulsations. *Attention à bien noter l'échelle également.*

Réponse 9: Voir le diagramme de Bode.

Question 10: Ajouter les tracés réels en précisant les valeurs particulières et en justifiant par le calcul.

Réponse 10: Par identification on a $K = 2, \omega_0 = 20 rad/s$ et $\xi = 0,2$, il y a donc résonance.
On calcule la pulsation de résonance ω_r :
$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$ soit $\boxed{\omega_r \simeq 19 rad/s}$.
Calculons la valeur du facteur de résonance Q :
$Q = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ soit $\boxed{Q \simeq 2,55}$
On sait que la résonance à la pulsation de résonance vaut $\boxed{20log(Q) \simeq 8,1dB}$.