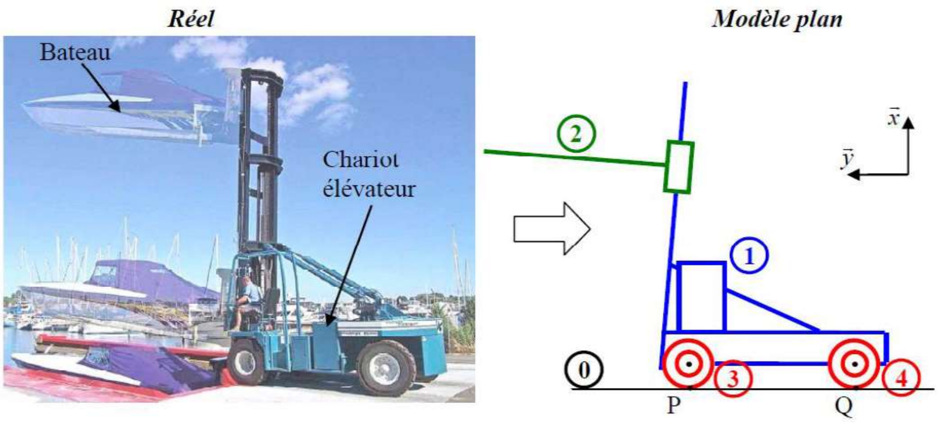
Résolution des problèmes de statique avec frottements

Compétence

Modéliser :

- Modélisation des liaisons non-parfaite lors de la prise en compte du frottement.
- Associer un modèle global d'effort au comportement d'une liaison réelle.



L'objectif de ce cours est de prendre en compte le frottement dans la résolution des problèmes de statique. Ainsi l'hypothèse des liaisons parfaites ne sera plus nécessaire pour résoudre un problème de statique (nous en parlerons dans le prochain cours).

1. Modélisation du frottement dans le cas d'un système à l'équilibre.

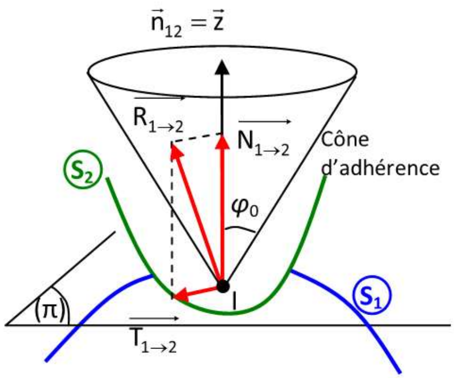
Si le frottement n'est pas négligeable, il existe une composante tangentielle à l'action mécanique. C'est la seconde loi de Coulomb qui permet de le modéliser :

2ème loi de Coulomb :

Non glissement en $I \Rightarrow \overrightarrow{V_{I,S_2/S_1}} = \vec{0}$

On définit un coefficient d'adhérence f_0 tel que $f_0 = \tan\varphi_0$ où φ_0 est le demi-angle au sommet du cône d'adhérence.

- $\overrightarrow{R_{1\to2}}$ est toujours dans le cône d'adhérence.
- On ne connaît pas exactement $\|\overrightarrow{T_{1\to2}}\| \leq f_0.\|\overrightarrow{N_{1\to2}}\|$
- Par contre, à la limite du glissement : $\|\overrightarrow{T_{1\to2}}\| = f_0.\|\overrightarrow{N_{1\to2}}\|$

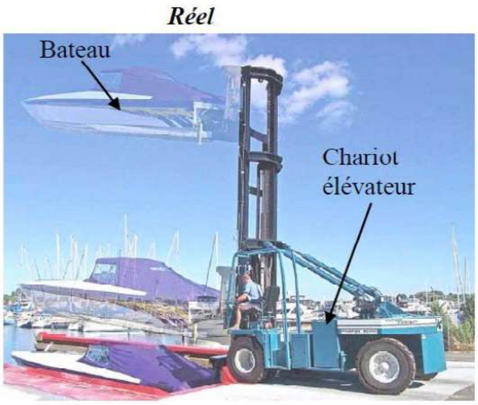


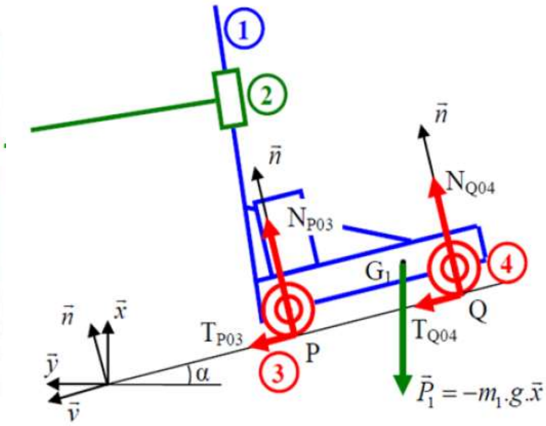
Les lois de Coulomb seront étudiées plus en profondeur dans le cours suivant.

2. Résolution analytique des problèmes de statique avec frottement

La méthode de résolution analytique des problèmes de statique reste la même que celle vue dans le cours de statique analytique. La prise en compte du frottement permet d'ajouter une équation scalaire supplémentaire (du type $T_{ij} = f_0 . N_{ij}$ à la limite du glissement) pour chaque couple de solides en contact avec frottement lors de l'étape de résolution du système d'équation.

2.1. Application sur le chariot élévateur





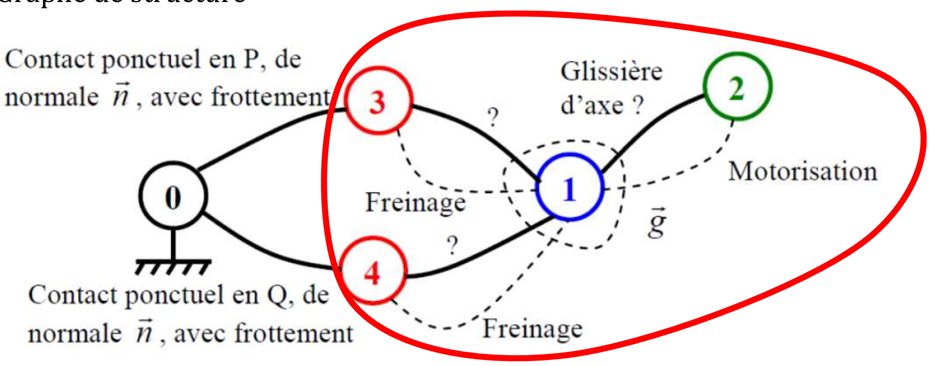
Le constructeur de ce chariot élévateur se demande s'il est plus judicieux de placer les freins sur les roues avants, ou les roues arrières. L'objectif est de déterminer dans la configuration donnée ci-dessus, s'il est plus intéressant de freiner avec les roues avants ou arrières. On cherche alors à déterminer le coefficient de frottement minimal $f_{roue/sol}$ qui garantira le non glissement du chariot dans les deux cas.

Les roues sont bloquées, freiné par un frein, et la liaison glissière est maintenu à sa hauteur par un moteur.

Données :

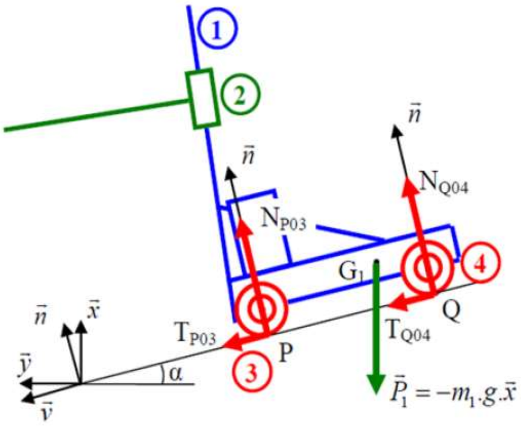
- $m_1 = 10\,000$ kg
- $g = 10$ m.s^{-2}
- $\overrightarrow{QP} = a\,\vec{v}$
- $\overrightarrow{QG_1} = b\vec{n} + c\vec{v}$
- $a = 4\,m, b = 1\,m, c = 3\,m$
- le coefficient de frottement $f_{roue/sol}$ est noté f
- $\alpha = 20°$
- On néglige les masses des autres éléments.

Etape 1 + 2 : Graphe de structure



Etape 2' : Aucun isolement n'est soumis qu'à deux glisseurs.

Etape 3 : On isole l'ensemble E={1+2+3+4} et on effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (B.A.M.E.) :



- Action du sol sur les roues en P : contact ponctuel avec frottement en P de normale $(P,\vec{n})$:

$$\{\mathcal{T}_{0\to 3}\} = \begin{Bmatrix} N_{03} & - \\ T_{03} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(P,\vec{n},\vec{v},\vec{z})}$$

- Action du sol sur les roues en Q : contact ponctuel avec frottement en Q de normale $(Q,\vec{n})$:

$$\{\mathcal{T}_{0\to 4}\} = \begin{Bmatrix} N_{04} & - \\ T_{04} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(Q,\vec{n},\vec{v},\vec{z})}$$

- Action de la pesanteur sur 1 en G_1 :

$$\{\mathcal{T}_{g\to 1}\} = \begin{Bmatrix} -m_1 g & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(G_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Etape 4 : On applique le PFS sur l'ensemble E au point Q.

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0\to 3}} \\ \overrightarrow{M_{Q(0\to 3)}} \end{Bmatrix}_Q + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0\to 4}} \\ \overrightarrow{M_{Q(0\to 4)}} \end{Bmatrix}_Q + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{g\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{Q(g\to 1)}} \end{Bmatrix}_Q = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On distingue 2 cas suivant si c'est la roue avant ou arrière qui freine.

Le frein est sur la roue avant ($T_{04} = 0$)	Le frein est sur la roue arrière ($T_{03} = 0$)

Théorème de la résultante :

$N_{03} + N_{04} - m_1 g\cos\alpha = 0$ (1)	$N_{03} + N_{04} - m_1 g\cos\alpha = 0$ (1)
$T_{03} + m_1 g\sin\alpha = 0$ $(2a)$	$T_{04} + m_1 g\sin\alpha = 0$ $(2b)$

Théorème du moment :

$$-a.N_{03} + m_1 g(c\cos\alpha + b\sin\alpha) = 0 \ (3)$$

Lois de Coulomb

$T_{03} = f_{av} N_{03}$ $(4a)$	$T_{04} = f_{ar} N_{04}$ $(4b)$

Etape 5 : Dans les deux cas, on a 4 inconnues pour 4 équations scalaires → on peut résoudre le système.

Etape 6 : Résolution

Dans les deux cas on trouve :

$$(3) \Rightarrow N_{03} = \frac{m_1 g(c\cos\alpha + b\sin\alpha)}{a}$$

$$(1) \Rightarrow N_{04} = m_1 g\cos\alpha - N_{03}$$

$$(2) \Rightarrow T_{03} = T_{04} = -m_1 g\sin\alpha$$

$(4a) \Rightarrow f_{av} = \left\lvert\frac{T_{03}}{N_{03}}\right\rvert$	$(4b) \Rightarrow f_{ar} = \left\lvert\frac{T_{04}}{N_{04}}\right\rvert$

Etape 7 : Applications numériques et conclusion.

$$N_{03} = 79 \text{ kN}$$

$$N_{04} = 15 \text{ kN}$$

$$T_{03} = T_{04} = -34 \text{ kN}$$

$f_{av} = 0{,}43$	$f_{ar} = 2{,}3$

On cherchait f minimal car si on a un coefficient de frottement inférieur à 0,43, il y a glissement. Il reste à reste à trouver un pneu/matériaux ou autre qui permettent d'avoir un coefficient supérieur à 0,43.