Correction DS 2 - SI

Consignes

— Copies propres et bien présentées: $\boxed{\text{encadrer vos résultats}}$, souligner les applications numériques (avec une règle bien sûr)...

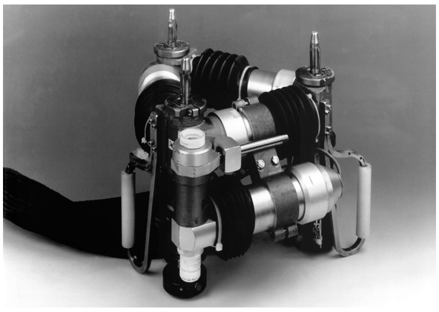
— Uniquement la calculatrice est autorisée.

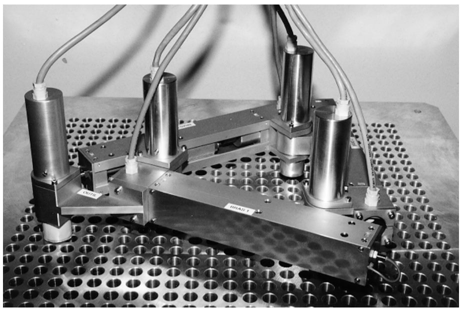
— Les exercices sont indépendants.

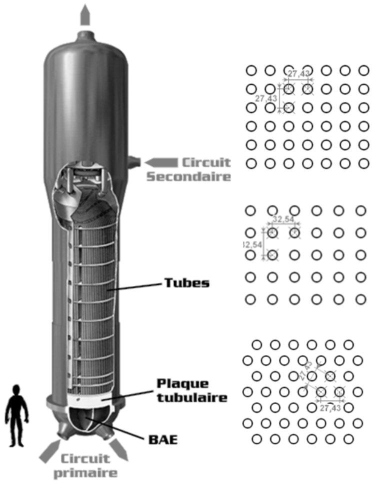
Table des matières

1. Robot d'inspection de tubes de centrale nucléaire

1.1 Présentation







Le robot positionneur TRIBAR permet de contrôler les tubes des générateurs de vapeur d'une centrale nucléaire. Pour cela, le robot doit :

— réaliser les déplacements le plus rapidement possible pour respecter la cadence de contrôle de 10 tubes à l'heure;

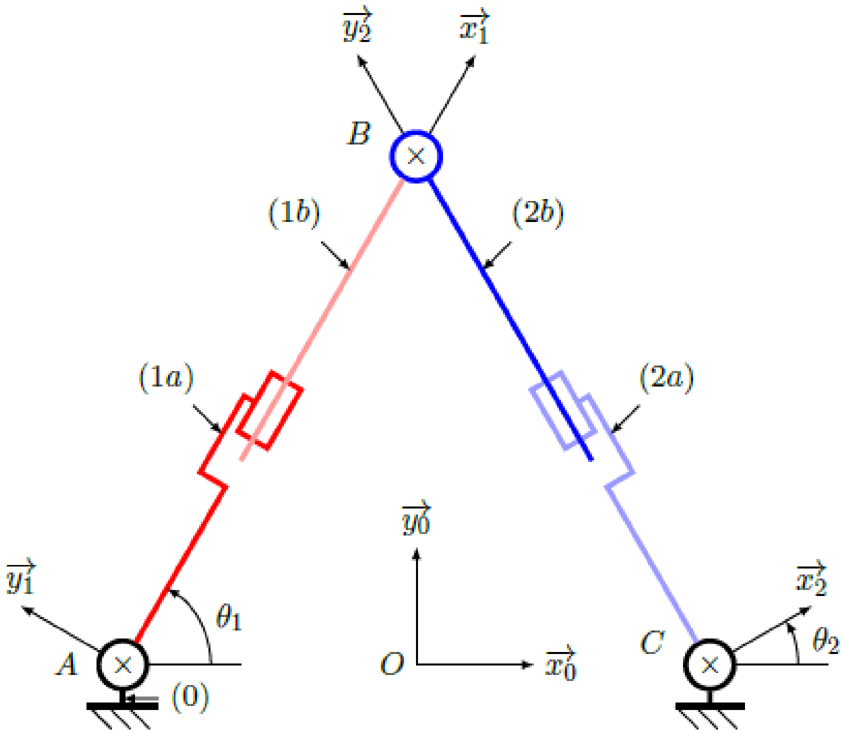
— positionner un tube pour guider la sonde contrôle au droit des tubes précisément, ce qui nécessite une précision de positionnement des doigts d'accrochage.

Le robot est donc constitué de trois doigts d'accrochage venant se positionner au droit des tubes et d'un doigt constitué de la sonde de contrôle. Les trois doigts d'accrochage sont déplacés par trois vérins à vis. Pour se déplacer le robot fixe deux doigts et déplace le troisième en commandant deux vérins.

Objectif - L'objectif de cet exercice est de déterminer les lois de mouvement à imposer aux deux vérins pour commander le déplacement du robot d'inspection.

1.2 Modélisation

Le modèle retenu pour le robot est donné sur le schéma cinématique plan suivant.



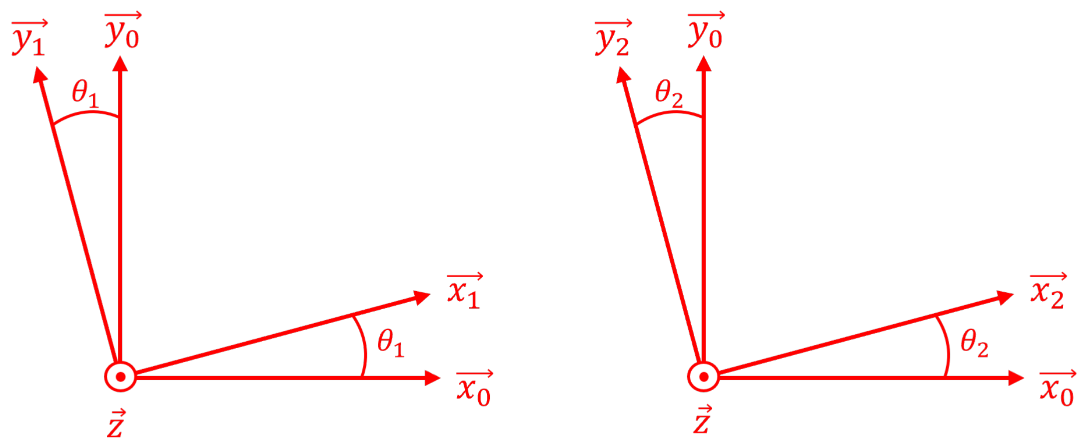
On associe

- le repère $\mathcal{R}_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z})$ aux doigts fixes,
- le repère $\mathcal{R}_1(A,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z})$ au vérin 1 (composé du corps 1a et de la tige 1b),
- le repère $\mathcal{R}_2(B,\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z})$ au vérin 2 (composé du corps 2a et de la tige 2b).

Les angles θ_1 et θ_2 sont définis par : $\theta_1 = (\vec{x_0},\vec{x_1})$ et $\theta_2 = (\vec{x_0},\vec{x_2})$.
On pose $\overrightarrow{OB} = x.\vec{x_0} + y.\vec{y_0}$; x et y sont donc les coordonnées du doigt mobile dans le repère $\mathcal{R}_0$. On pose également $\overrightarrow{AB} = \lambda_1.\vec{x_1}$ et $\overrightarrow{CB} = \lambda_2.\vec{y_2}$; λ_1 et λ_2 sont donc les longueurs des vérins à piloter pour imposer la position du point B.
La distance AC est constante et égale à L et $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Question 1: Réaliser les figures de changements de base.

Réponse 1:



Question 2: Écrire les deux fermetures géométriques entre les points A, O, B et entre C, B, O.

Réponse 2: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}=\vec{0}$,
soit, $x.\vec{x_0}+y.\vec{y_0}-\lambda_1.\vec{x_1}+\frac{L}{2}.\vec{x_0}=\vec{0}$ et
$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\vec{0}$,
soit, $x.\vec{x_0}+y.\vec{y_0}-\lambda_2.\vec{y_2}-\frac{L}{2}.\vec{x_0}=\vec{0}$

Question 3: En utilisant le paramétrage donné, projeter ces deux relations dans la base $\mathcal{B}_0$.

Réponse 3: $x.\vec{x_0}+y.\vec{y_0}-\lambda_1.(\cos\theta_1\vec{x_0}+\sin\theta_1\vec{y_0})+\frac{L}{2}.\vec{x_0}=\vec{0}$
et $x.\vec{x_0}+y.\vec{y_0}-\lambda_2.(\cos\theta_2\vec{y_0}-\sin\theta_2\vec{x_0})-\frac{L}{2}.\vec{x_0}=\vec{0}$
Par projection sur $\vec{x_0}$ et $\vec{y_0}$, il vient les quatre équations suivantes :

$$\begin{cases} x-\lambda_1\cos\theta_1+\frac{L}{2}=0 \\ y-\lambda_1\sin\theta_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\lambda_2\sin\theta_2-\frac{L}{2}=0 \\ y-\lambda_2\cos\theta_2=0 \end{cases}$$

Question 4: En déduire les expressions de λ_1 et λ_2 en fonction de x, y et L.

Réponse 4: Il reste à éliminer les θ_1 et θ_2 (paramètres angulaires). Il convient donc d'isoler les termes dépendant de ces paramètres puis d'élever au carré toutes les équations :

$$\begin{cases} (x+\frac{L}{2})^2=\lambda_1^2\cos(\theta_1)^2 \\ y^2=\lambda_1^2\sin(\theta_1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\frac{L}{2}-x)^2=\lambda_1^2\sin(\theta_1)^2 \\ y^2=\lambda_1^2\cos(\theta_1)^2 \end{cases}$$

En sommant les équations deux à deux, comme $\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2=1$, il vient :
$\boxed{\lambda_1=\sqrt{(x+\frac{L}{2})^2+y^2} \text{ et } \lambda_2=\sqrt{(\frac{L}{2}-x)^2+y^2}}$ (ou $\lambda_2=\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2+y^2}$, ce qui est équivalent)

Les vérins ont une course de $L=10cm$. Lorsqu'ils sont complètement rentrés, la longueur $AB=BC$ vaut également L.

Question 5: Déterminer l'expression de la position maximale que pourra atteindre le point B selon $\vec{y_0}$. Réaliser l'application numérique.

Réponse 5: La position maximale du point B selon $\vec{y_0}$ est atteinte quand les vérins sont complètement étendus et que $\lambda_1 = \lambda_2$. Dans ce cas le triangle AOB est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore :
$AB^2_{max} = OB^2_{max} + OA^2$
$\Rightarrow OB^2_{max} = AB^2_{max} - OA^2$
$\Rightarrow OB_{max} = \sqrt{AB^2_{max} - OA^2}$
$\Rightarrow OB_{max} = \sqrt{(L+L))^2 - (\frac{L}{2}))^2}$
$\boxed{\Rightarrow OB_{max} = \sqrt{15}\frac{L}{2}}$
A.N. : 19,4cm

2. Asservissement : exercice d'application

Le système étudié est décrit par les équations différentielles suivantes :

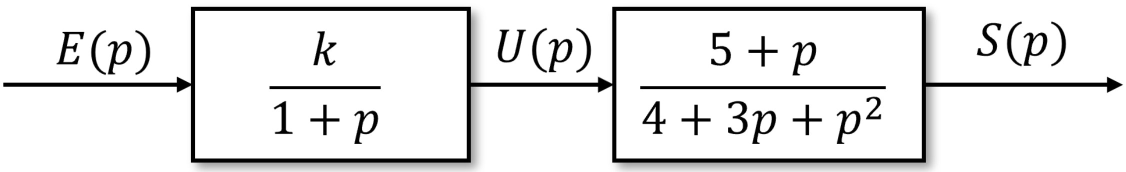
$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3.\frac{ds(t)}{dt} + 4.s(t) = \frac{du(t)}{dt} + 5.u(t)$$
$$\frac{du(t)}{dt} + u(t) = k.e(t)$$

L'entrée du système est $e(t)$, la sortie est $s(t)$ et $u(t)$ est une grandeur intermédiaire. On suppose les conditions initiales nulles.
Question 6: Exprimer ces équations dans le domaine de Laplace.

Réponse 6: Il vient $\boxed{S(p)(p^2+3p+4) = (p+5)U(p)}$ et $\boxed{U(p)(p+1) = k.E(p)}$.

Question 7: Tracer le schéma-bloc correspondant.

Réponse 7: Pour cela nous pouvons faire apparaître pour chaque relation la sortie sur l'entrée : $\frac{S(p)}{U(p)} = \frac{p+5}{p^2+3p+4}$ et $\frac{U(p)}{E(p)} = \frac{k}{p+1}$ d'où :



Question 8: Déterminer la fonction de transfert du système $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$.

Réponse 8: Les blocs sont en série, il suffit de les multiplier (ou de remplacer de proche en proche) : $\boxed{H(p) = \frac{k(p+5)}{(p+1)(p^2+3p+4)}}$.

Le système est sollicité par une entrée en échelon d'amplitude E_0.
Question 9: Déterminer la valeur finale de la sortie $s(t)$.

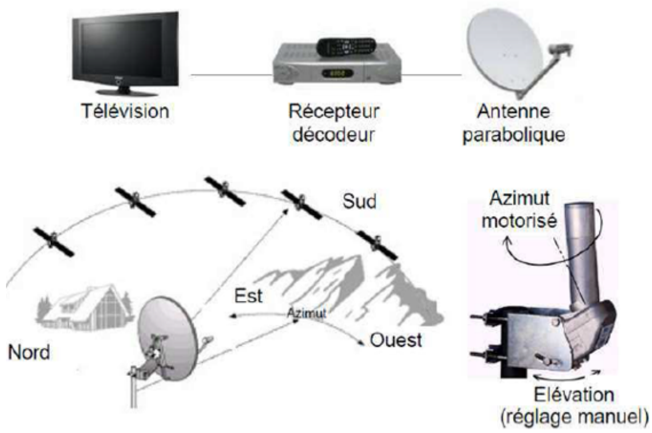
Réponse 9: L'entrée en échelon d'amplitude E_0 correspond dans le domaine de Laplace à la fonction $E(p) = \frac{E_0}{p}$.

La sortie vaut donc $S(p) = \frac{E_0}{p} \cdot \frac{k(p+5)}{(p+1)(p^2+3p+4)}$ D'après le théorème de la valeur finale : $\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0^+} p.S(p)$

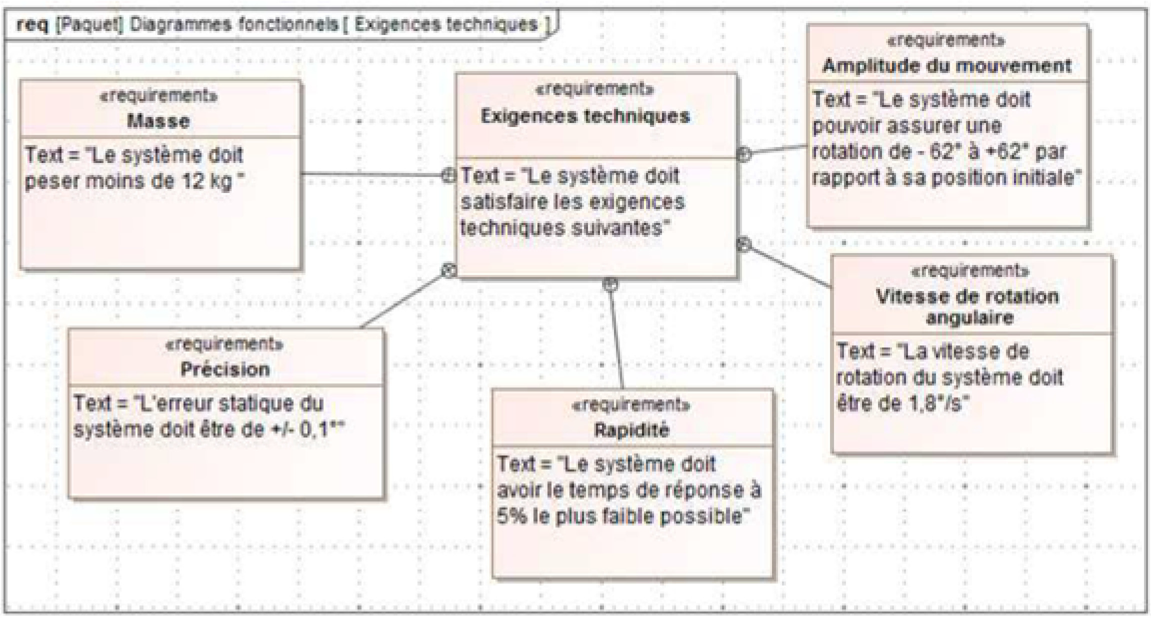
Soit $\boxed{\lim_{t \to +\infty} s(t) = \frac{5.k.E_0}{4}}$.

3. Antenne parabolique

La réception de chaînes de télévision par satellite nécessite un récepteur/décodeur et une antenne parabolique. Pour augmenter le nombre de chaînes reçues, l'antenne doit pouvoir s'orienter vers un ou plusieurs satellites différents. Le satellite choisi dépend de la chaîne demandée. Tous les satellites de radiodiffusion sont situés sur l'orbite géostationnaire à 36 000km au dessus de l'équateur. Le réglage de l'orientation de l'antenne ne nécessite donc qu'une seule rotation autour d'un axe appelé axe d'azimut.

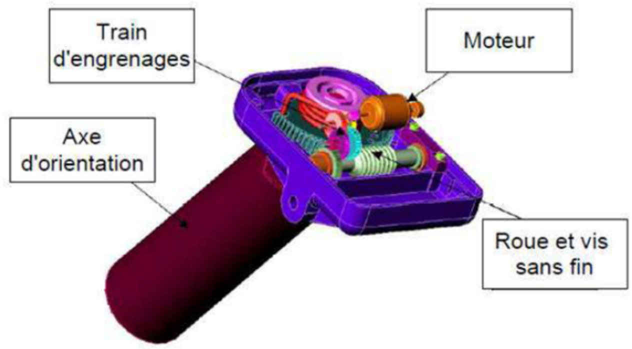


On donne une description structurelle du système ainsi qu'un extrait partiel de cahier des charges fonctionnel.



L'axe d'orientation d'azimut utilise un dispositif de réduction de vitesse (engrenages et roue-et-vis-sans-fin). Si on note $\omega_a(t)$ la vitesse de rotation de l'axe de l'orientation et $\omega_m(t)$ la vitesse de rotation du moteur, on a la relation suivante :

$$\frac{\omega_a(t)}{\omega_m(t)} = \frac{1}{N} = \frac{1}{23328}$$



On donne le modèle de connaissance du moteur à courant continu suivant :

$$u_m(t) = e_m(t) + Ri_m(t) + L\frac{di_m(t)}{dt} \qquad e_m(t) = k_e\omega_m(t)$$

$$J\frac{d\omega_m(t)}{dt} = c_m(t) \qquad c_m(t) = k_c i_m(t)$$

Avec :

$u_m(t)$: tension aux bornes du moteur (en V)
$e_m(t)$: force contre-électromotrice (en V)
$i_m(t)$: intensité (en A)
$\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s)
$c_m(t)$: couple moteur (en Nm)

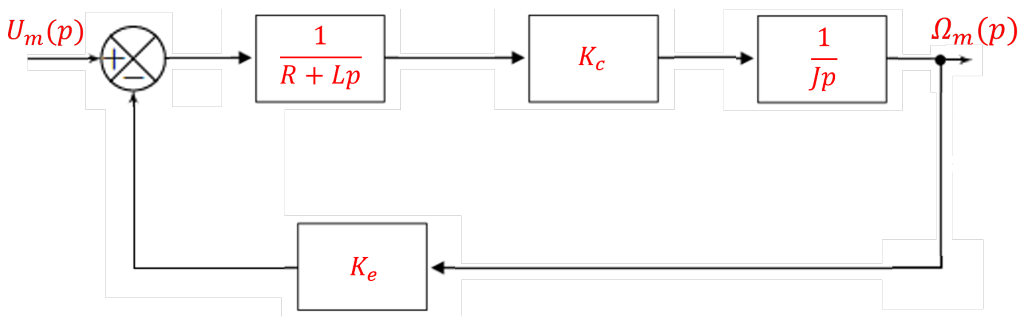
J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m²)
R : résistance électrique du moteur (9,1 Ω)
L : inductance du moteur (en H)
K_e : constante de force contre-électromotrice (0.022Vs/rad)
K_c : constante de couple (0.022Nm/A)

Question 10: Exprimer ces équations dans le domaine de Laplace, en considérant que les conditions de Heaviside sont respectées.

Réponse 10: $U_m(p) = E_m(p) + RI_m(p) + LpI_m(p)$
$E_m(p) = k_e\Omega_m(p)$
$Jp\Omega_m(p) = C_m(p)$
$C_m(p) = k_cI_m(p)$

Question 11: Recopier - *rapidement et proprement* - le schéma bloc suivant puis le compléter en s'aidant des équations du moteur. L'entrée en temporelle est $u_m(t)$ et la sortie $\omega_m(t)$.

Réponse 11:



Question 12: Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$. Mettre cette fonction sous forme canonique et donner son ordre et sa classe.

Réponse 12: Par une formule de Black on trouve
$$H(p) = \frac{K_c}{(R+Lp)Jp}\frac{1}{1+\dfrac{K_cK_e}{(R+Lp)Jp}}$$
Soit sous forme canonique : $\boxed{H(p) = \dfrac{1}{K_e}\dfrac{1}{1+\dfrac{RJ}{K_cK_e}p+\dfrac{LJ}{K_cK_e}p^2}}$.
On identifie une fonction d'ordre 2 et de classe 0.

On peut montrer que la fonction peut se simplifier par $H(p) = \dfrac{K}{(1+\tau_m p)}$. Nous admettrons cette expression.

Question 13: En sollicitant le système par une entrée en échelon de valeur U_0, déterminer l'expression analytique de $\omega(t)$ en fonction de K, τ_m et U_0. On donne $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{1}{p}) = u_h(t)$ et $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{1}{p+a}) = e^{-a.t}.u_h(t)$ où $u_h(t)$ correspond à la fonction de Heaviside.

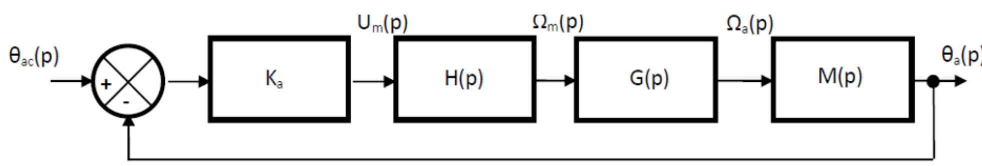
Réponse 13: On a $\Omega_m(p) = U_m(p)H(p) = \dfrac{U_0}{p}\dfrac{K}{1+\tau_m p}$
Une décomposition en éléments simples donne :
$\Omega_m(p) = \dfrac{U_0K}{p} + \dfrac{-U_0K\tau_m}{1+\tau_m p}$ soit $\Omega_m(p) = \dfrac{U_0K}{p} - \dfrac{U_0K}{\dfrac{1}{\tau_m}+p}$
Par la transformée inverse de Laplace, il vient :
$$\boxed{\omega(t) = U_0Ku_h(t)\left(1-e^{-\dfrac{t}{\tau_m}}\right)}.$$

Indépendamment des résultats précédents, on considère pour la suite $\tau_m = 0,012s$ et $K = 45rad.s^{-1}.V^{-1}$. La tension nominale d'utilisation est $U_0 = 18V$.

Question 14: Montrer que le moteur n'excède pas sa valeur limite de rotation de 8000tr/min.

Réponse 14: D'après l'expression précédente : $\boxed{\lim_{t\to\infty}\omega(t) = KU_0}$ soit $\underline{\omega(t) = 810rad/s \simeq 7735tr/min}$. Ce qui est effectivement inférieur à 8000tr/min.

La chaîne d'asservissement complète est donnée sur le schéma-bloc suivant, où θ_{ac} est l'angle consigne, θ_a l'angle réel de l'antenne défini par $\dfrac{d\theta_a(t)}{dt} = \omega_a(t)$ et K_a un gain pur constant.



Question 15: Déterminer l'expression de $G(p)$ et $M(p)$.

Réponse 15: L'énoncé donne $\dfrac{\omega_a(t)}{\omega_m(t)} = \dfrac{1}{N}$ soit $\Omega_a(p) = \dfrac{1}{N}\Omega_m(p)$ d'où $\boxed{G(p) = \dfrac{1}{N}}$.
Comme $\dfrac{d\theta_a(t)}{dt} = \omega_a(t)$, il vient dans le domaine de Laplace $p\theta_a(p) = \Omega_a(p)$ soit $\boxed{M(p) = \dfrac{1}{p}}$.

Question 16: Déterminer la fonction de transfert $F(p) = \dfrac{\theta_a(p)}{\theta_{ac}(p)}$. L'écrire sous forme canonique, déterminer son ordre, sa classe et son gain.

Réponse 16: Par une formule de Black il vient :

$$F(p) = \frac{K_aK}{Np(1+\tau_m p)} \frac{1}{1+\dfrac{K_aK}{Np(1+\tau_m p)}} = \frac{K_aK}{Np(1+\tau_m p)+K_aK}.$$

Soit sous forme canonique : $\boxed{F(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{N}{K_aK}p+\dfrac{N\tau_m}{K_aK}p^2}}$.

On identifie une fonction d'ordre 2 et de classe 0.

Question 17: Montrer que le système vérifie le critère d'écart de positionnement du cahier des charges (*entrée en échelon donc*).

Réponse 17: Il faut utiliser le théorème de la valeur finale. Comme F(p) tend vers 1 quand p tend vers 0, (c'est à dire que le gain de F(p) vaut 1), le système est précis.

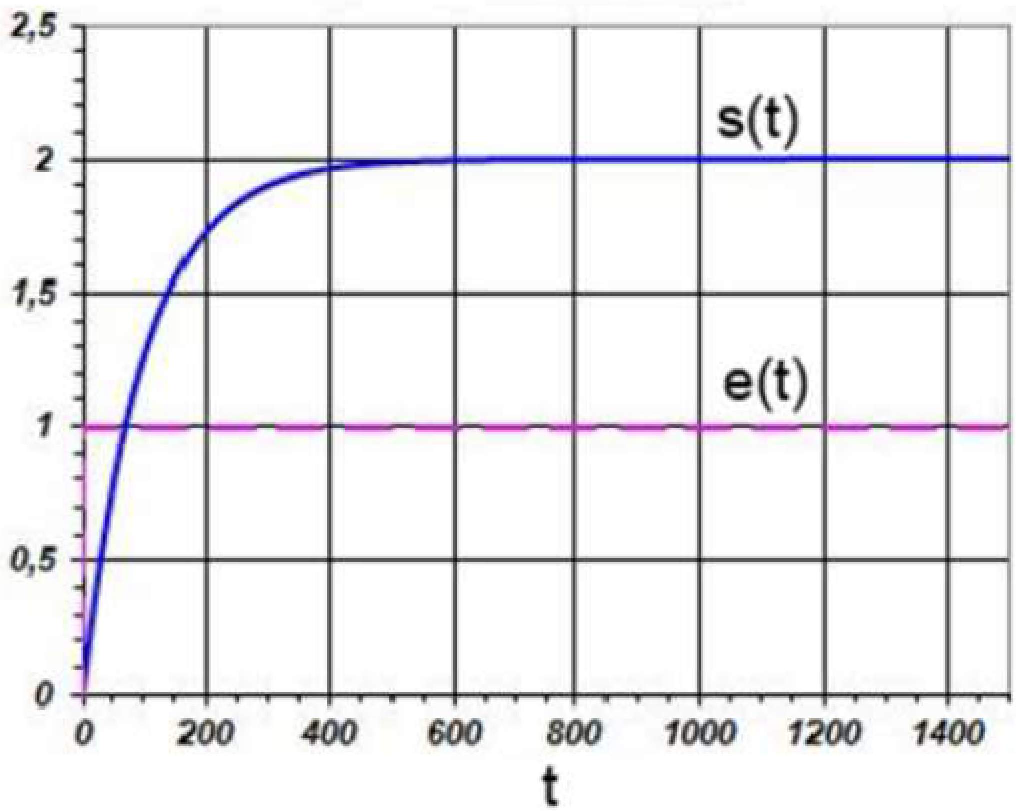
4. Performances d'un système asservi

4.1 Asservissement en position

Le cahier des charges d'un asservissement en position est proposé ci-dessous :

Critères	**Niveaux**
Stabilité	Le système doit être stable
Précision	Erreur statique inférieure à 5%
Rapidité	Temps de réponse à 5% inférieur à 20s
Dépassement	Premier dépassement inférieur à 10%

Ce système est soumis à une consigne en échelon. La réponse temporelle de cet essai est proposée ci-dessous.
L'échelle de temps est en centième de seconde, donc 1000 sur l'essai correspond à 10s.



Question 18: Le système satisfait-il le cahier des charges ? Il faut bien sûr justifier à l'aide de **tous** les critères.

Réponse 18:

— Le système est stable car la sortie est bornée pour une entrée bornée.

— L'erreur statique est de 1 (il manque les unités), car la valeur finale de la sortie vaut 2 et la valeur d'entrée vaut 1. Cela fait une erreur de 100%, ce qui est supérieur à 5%.

— Le temps de réponse à 5% (temps pour lequel 0.95% de la valeur finale sont atteints) vaut à peu près 3,50s, ce qui est inférieur à 20s.

— Il n'y a pas de dépassement, ce qui est donc inférieur à 10%.

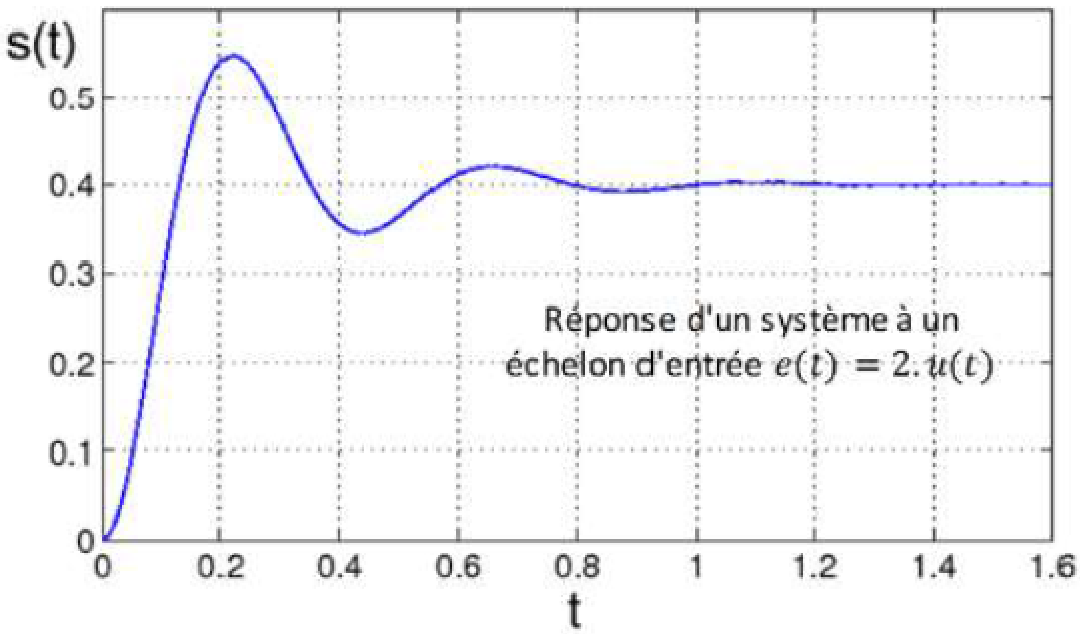
Le cahier des charges n'est pas respecté à cause du critère de précision.

4.2 Asservissement en vitesse

Le cahier des charges d'un asservissement en vitesse est proposé ci-dessous :

Critères	**Niveaux**
Stabilité	Le système doit être stable
Précision	Erreur statique inférieure à 10%
Rapidité	Temps de réponse à 5% inférieur à 25s
Dépassement	Premier dépassement inférieur à 20%

Ce système est soumis à une consigne en échelon. La réponse temporelle de cet essai est proposée ci-dessous.
L'échelle de temps est en dizaine de seconde, donc 1 sur l'essai correspond à 10s.



Question 19: Le système satisfait-il le cahier des charges ? Il faut bien sûr justifier à l'aide de **tous** les critères.

Réponse 19:

- Le système est stable car la sortie est bornée pour une entrée bornée.
- L'erreur statique est de $2 - 0,4 = 1,6$ car l'entrée vaut 2 et la valeur finale de la sortie est de 0,4; ce qui fait un écart de $\frac{2-0,4}{2} = 80\% > 10\%$ spécifiés par le cahier des charges.
- Le temps de réponse à 5% est à peu près de 7,5s.
- Le dépassement D1 vaut $0,55 - 0,4 = 0,15$, soit $\frac{0,15}{0,4} = 37,5\% > 20\%$ spécifiés par le cahier des charges.

Les critères de précision et de dépassement ne sont pas respectés. Le système ne satisfait pas le cahier des charges.