Correction DS 4 - SI

Table des matières

1. Base du cours

Question 1: Quelles sont les trois méthodes pour déterminer un vecteur vitesse ?

Réponse 1: La composition, le déplacement de point (Varignon) et la dérivation du vecteur position.

Question 2: L'une de ces méthodes à une condition pour pouvoir l'appliquer, préciser laquelle et exprimer la condition.

Réponse 2: La dérivation du vecteur position ne peut se faire que lorsque le point appartient physiquement au solide concerné.

Question 3: Comment calculer un vecteur accélération ?

Réponse 3: En dérivant le vecteur vitesse, il n'y a pas d'autre méthode.

Question 4: Écrire la formule de Bour et préciser l'utilisation qui en est généralement faite.

Réponse 4: $\left.\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right]_{R_0} = \left.\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{x_1}$

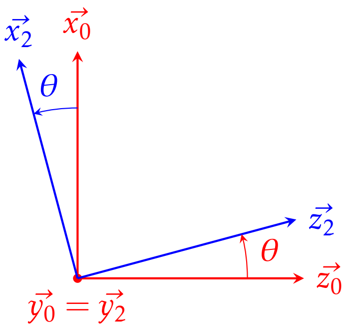
On s'en sert pour calculer la dérivée d'un vecteur d'une base.

Question 5: Écrire la relation de Varignon.

Réponse 5: $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

Soit une rotation entre deux solides définie par $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_2}) = (\vec{z_0}, \vec{z_2})$.

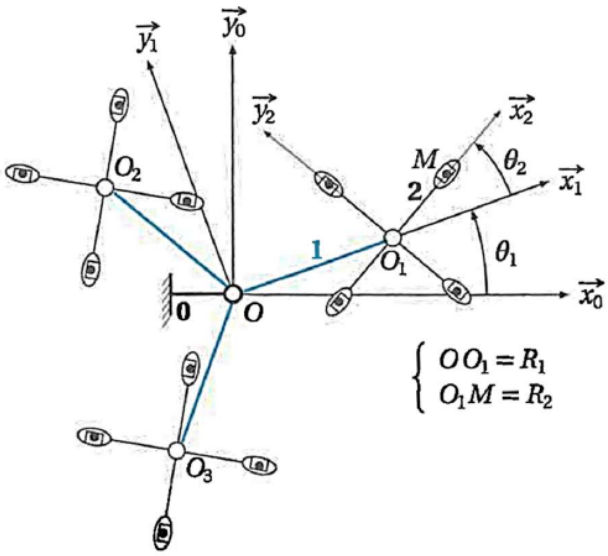
Question 6: Réaliser la figure de changement de base.

Réponse 6: 

Question 7: Exprimer le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ et en déduire $\overrightarrow{\Omega_{0/1}}$.

Réponse 7: $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}\vec{y_2}$ et on sait que $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -\overrightarrow{\Omega_{0/1}}$, d'où $\overrightarrow{\Omega_{0/1}} = -\dot{\theta}\vec{y_2}$.

Soit le schéma cinématique du manège pieuvre suivant :



Question 8: Déterminer le torseur cinématique de 1 par rapport à 0 et celui de 2 par rapport à 1. Les écrire en colonne et en ligne.

Réponse 8: $$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 \end{array} \right\}_{O,(-,-,\vec{z_0})} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 \end{array} \right\}_{O_1,(-,-,\vec{z_1})} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_2\vec{z_1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1}$$

Question 9: Pour les deux notations possibles, préciser où se trouvent la résultante et le moment de réduction.

Réponse 9: En colonne, la résultante est toujours à gauche, donc le moment de réduction à droite.
En ligne, la résultante est toujours en haut, donc le moment de réduction en bas.

Nous faisons maintenant l'hypothèse d'un système plan.

Question 10: Réécrire les torseurs précédents suite à cette hypothèse. *Donc forcément en colonne.*

Réponse 10: $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ - & 0 \\ \dot{\theta}_1 & - \end{Bmatrix}_{O,(-,-,\vec{z_0})}$

$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ - & 0 \\ \dot{\theta}_2 & - \end{Bmatrix}_{O_1,(-,-,\vec{z_1})}$

2. Torseur et liaison

2.1 Identification de liaison à partir de torseur

Question 11: Identifier les liaisons correspondantes et représenter leur symbolisations normalisées planes et spatiales.

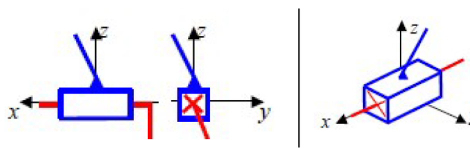
(a). $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

(b). $\{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(B,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

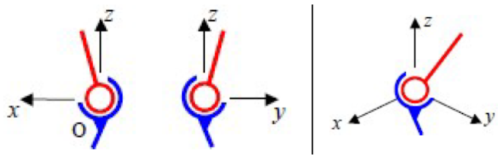
(c). $\{\mathcal{V}_{4/3}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Réponse 11: Il *suffit* de se rappeler du tableau, ou de les retrouver (les points et vecteurs des figures peuvent ne pas correspondre) :

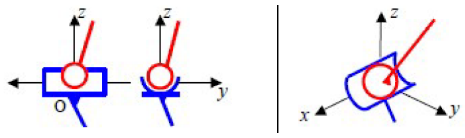
(a) Liaison glissière $(A,\vec{x})$



(b) Liaison rotule ou sphérique ou sphère-sphère (B)



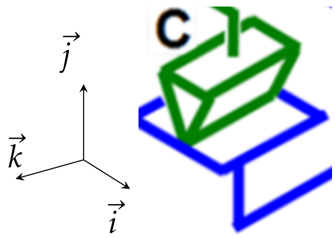
(c) Liaison linéaire annulaire ou sphère-cylindre (C,$\vec{y}$)



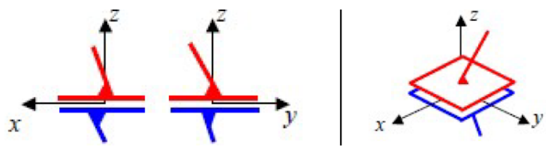
2.2 Expression de torseur à partir de liaison

Question 12: Exprimer les torseurs cinématiques associées aux liaisons suivantes en précisant leur nom et spécification. Si besoin, vous pouvez définir des points.

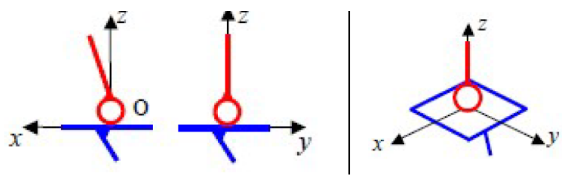
(a).



(b).



(c).



Réponse 12: Si on ne les connaît, on peut les retrouver :

(a) Linéaire rectiligne de normale $\vec{j}$ et de direction $\vec{k}$. Son torseur cinématique est $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_j \\ \omega_j & 0 \\ \omega_k & V_k \end{array} \right\}_{C,(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$.

(b) Appui plan ou plan-plan de normale $\vec{z}$.

Son torseur cinématique est $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.

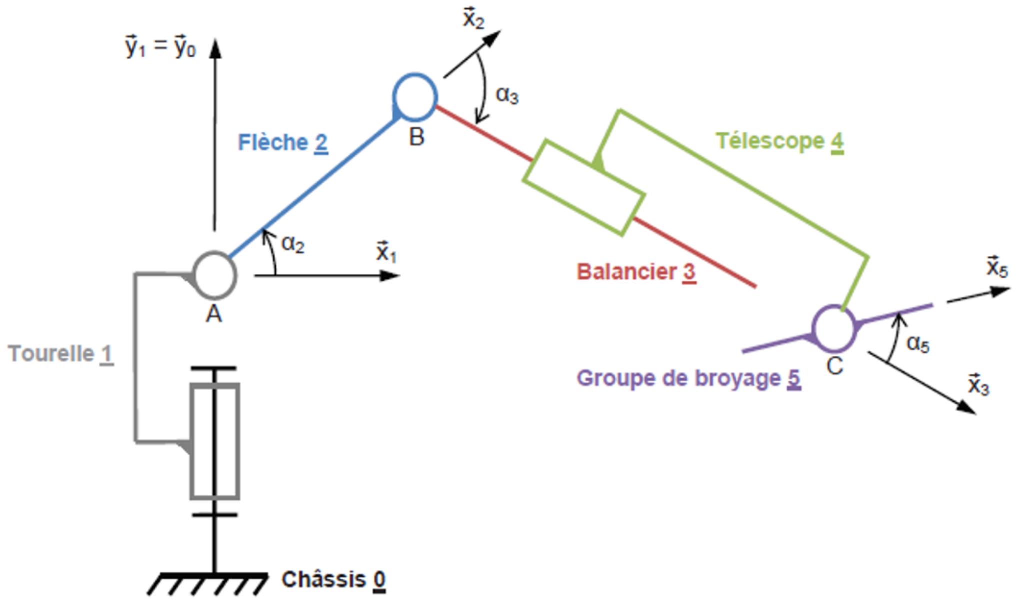
(c) Ponctuelle de normale $\vec{z}$.

Son torseur cinématique est $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.

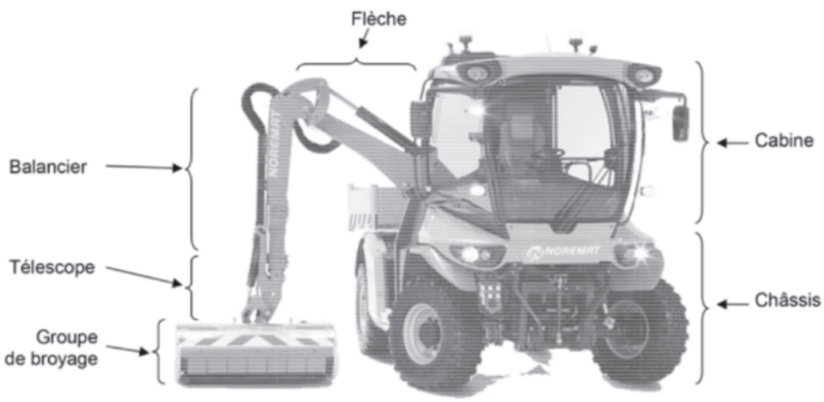
3. Bras de débroussailleuse

3.1 Modélisation

On s'intéresse au bras d'une débroussailleuse qui peut monté sur un véhicule de type tracteur. Le schéma cinématique du bras est donné ci-dessous.



On note $\overrightarrow{AB} = L_2\vec{x_2}$ et $\overrightarrow{BC} = \lambda\vec{x_3}$.



Le paramétrage est le suivant :

— La liaison pivot d'axe $(A,\vec{y_0})$ entre la tourelle 1 et le châssis 0 est paramétrée par α_1 tel que $\alpha_1 = (\vec{x_0},\vec{x_1})$ avec $\alpha_1 \in [0°;90°]$.

— La liaison pivot d'axe $(A, \vec{z_1})$ entre la flèche 2 et la tourelle 1 est paramétrée par α_2 tel que $\alpha_2 = (\vec{x_1}, \vec{x_2})$ avec $\alpha_2 \in [0°; 90°]$.

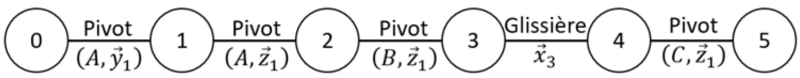
— La liaison pivot d'axe $(B, \vec{z_1})$ entre le balancier 3 et la flèche 2 est paramétrée par α_3 tel que $\alpha_3 = (\vec{x_2}, \vec{x_3})$ avec $\alpha_3 \in [-155°; -10°]$.

— La liaison glissière de direction $\vec{x_3}$ entre le télescope 4 et le balancier 3 est paramétrée par $\lambda(t)$ avec $\lambda \in [2m; 3m]$.
— La liaison pivot d'axe $(C, \vec{z_1})$ entre le groupe de broyage 5 et le télescope 4 est paramétrée par α_5 tel que $\alpha_5 = (\vec{x_3}, \vec{x_5})$ avec $\alpha_5 \in [-20°; 180°]$.

3.2 Étude

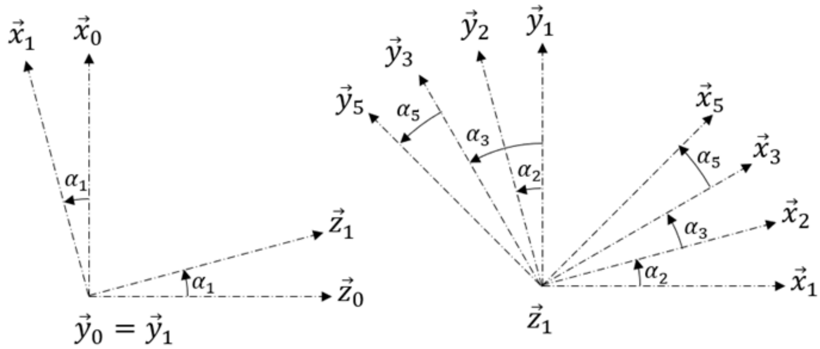
Question 13: Réaliser le graphe de liaison.

Réponse 13:



Question 14: Tracer les figures de changement de base.

Réponse 14:



Question 15: Écrire les torseurs cinématiques de chaque liaison.

Réponse 15: $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}_1 \vec{y_0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$; $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}_2 \vec{z_1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$; $\{\mathcal{V}_{3/2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}_3 \vec{z_1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$;
$\{\mathcal{V}_{4/3}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \vec{x_3} \end{array} \right\}_C$; $\{\mathcal{V}_{5/4}\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}_5 \vec{z_1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$

Question 16: Déterminer la vitesse $\overrightarrow{V_{C\in 4/0}}$ par la méthode de votre choix.

Réponse 16: Par exemple par dérivation :
$\overrightarrow{V_{C\in 4/0}} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{AC}}{dt}\right]_{R_0}$
$\overrightarrow{V_{C\in 4/0}} = L_2 \left.\dfrac{d\vec{x_2}}{dt}\right]_{R_0} + \dot{\lambda}\vec{x_3} + \lambda \left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right]_{R_0}$
Et d'après la formule de Bour :
$\left.\dfrac{d\vec{x_2}}{dt}\right]_{R_0} = \left.\dfrac{d\vec{x_2}}{dt}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \vec{x_2}$ et $\left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right]_{R_0} = \left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right]_{R_3} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \vec{x_3}$
On en déduit
$\left.\dfrac{d\vec{x_2}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{\alpha}_2\vec{y_2} - \dot{\alpha}_1\cos(\alpha_2)\vec{z_1}$ et $\left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right]_{R_0} = (\dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3)\vec{y_3} - \dot{\alpha}_1\cos(\alpha_2+\alpha_3)\vec{z_1}$
Enfin $\boxed{\overrightarrow{V_{C\in 4/0}} = L_2(\dot{\alpha}_2\vec{y_2} - \dot{\alpha}_1\cos(\alpha_2)\vec{z_1}) + \dot{\lambda}\vec{x_3} + \lambda((\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_3)\vec{y_3} - \dot{\alpha}_1\cos(\alpha_2+\alpha_3)\vec{z_1})}$
ou $\boxed{\overrightarrow{V_{C\in 4/0}} = L_2\dot{\alpha}_2\vec{y_2} + \lambda(\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_3)\vec{y_3} + \dot{\lambda}\vec{x_3} - (L_2\cos(\alpha_2) + \lambda\cos(\alpha_2+\alpha_3))\dot{\alpha}_1\vec{z_1}}$.

Question 17: Déterminer la vitesse $\overrightarrow{V_{C\in 4/0}}$ par une autre méthode.

Réponse 17: Par composition des mouvements puis changement de point avec Varignon :
$\overrightarrow{V_{C\in 4/0}} = \overrightarrow{V_{C\in 4/3}} + \overrightarrow{V_{C\in 3/2}} + \overrightarrow{V_{C\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$.
Et :

- $\overrightarrow{V_{C\in 4/3}} = \dot{\lambda}\vec{x_3}$;
- $\overrightarrow{V_{C\in 3/2}} = \overrightarrow{V_{B\in 3/2}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \vec{0} - \lambda\vec{x_3} \wedge \dot{\alpha}_3\vec{z_1} = \lambda\dot{\alpha}_3\vec{y_3}$;
- $\overrightarrow{V_{C\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = (-\lambda\vec{x_3} - L_2\vec{x_2}) \wedge \dot{\alpha}_2\vec{z_1} = \lambda\dot{\alpha}_2\vec{y_3} + L_2\dot{\alpha}_2\vec{y_2}$;
- $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = (-\lambda\vec{x_3} - L_2\vec{x_2}) \wedge \dot{\alpha}_1\vec{y_0} = -(\lambda\cos(\alpha_2+\alpha_3) + L_2\cos(\alpha_2))\dot{\alpha}_1\vec{z_1}$;

On retrouve bien
$\boxed{\overrightarrow{V_{C\in 4/0}} = L_2\dot{\alpha}_2\vec{y_2} + \lambda(\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_3)\vec{y_3} + \dot{\lambda}\vec{x_3} - (L_2\cos(\alpha_2) + \lambda\cos(\alpha_2+\alpha_3))\dot{\alpha}_1\vec{z_1}}$.

Question 18: On souhaite que le point C ait une trajectoire verticale ascendante (taillage de haie). En déduire une relation à imposer entre les paramètres.

Réponse 18: Si C possède une trajectoire verticale par rapport à 0, alors $\overrightarrow{V_{C\in 4/0}}$ n'a de composante que suivant $\vec{y_1}$, c'est à dire $\overrightarrow{V_{C\in 4/0}}.\vec{x_1} = 0$ et $\overrightarrow{V_{C\in 4/0}}.\vec{z_1} = 0$.
Soit :
$\overrightarrow{V_{C\in 4/0}}.\vec{x_1} = 0$
$\Longleftrightarrow L_2\dot{\alpha}_2\vec{y_2}.\vec{x_1} + \lambda(\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_3)\vec{y_3}.\vec{x_1} + \dot{\lambda}\vec{x_3}.\vec{x_1} = 0$
car $\vec{x_1}.\vec{z_1} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{-L_2\dot{\alpha}_2\sin(\alpha_2) - \lambda(\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_3)\sin(\alpha_2+\alpha_3) + \dot{\lambda}\cos(\alpha_2+\alpha_3) = 0}$.
Et : $\overrightarrow{V_{C\in 4/0}}.\vec{z_1} = 0$
$\Longleftrightarrow \dot{\alpha}_1(L_2\cos\alpha_2 + \lambda\cos(\alpha_2+\alpha_3)) = 0$
$\Longleftrightarrow \boxed{\dot{\alpha}_1 = 0}$, ce qui est assez intuitif.

Question 19: *[Bonus]* Déterminer l'expression de $\overrightarrow{\Gamma_{C\in 4/0}}$.

Réponse 19: Pour cela il faut dériver le vecteur vitesse :
$\overrightarrow{\Gamma_{C\in 4/0}} = \left.\dfrac{dV_{C\in 4/0}}{dt}\right]_{R_0}$
Pour faciliter le calcul, posons $\mu(t) = L_2\cos(\alpha_2) + \lambda\cos(\alpha_2+\alpha_3)$, ainsi :
$\overrightarrow{\Gamma_{C\in 4/0}} = L_2\ddot{\alpha}_2\vec{y_2} + L_2\dot{\alpha}_2\left.\dfrac{d\vec{y_2}}{dt}\right]_{R_0} + \lambda(\ddot{\alpha}_2+\ddot{\alpha}_3)\vec{y_3} + \dot{\lambda}(\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_3)\vec{y_3} + \lambda(\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_3)\left.\dfrac{d\vec{y_3}}{dt}\right]_{R_0} + \ddot{\lambda}\vec{x_3} + \dot{\lambda}\left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right]_{R_0} - L_2\ddot{\alpha}_1\mu\vec{z_1} - L_2\dot{\alpha}_1\left.\dfrac{d\mu}{dt}\right]_{R_0}\vec{z_1} - L_2\dot{\alpha}_1\mu\left.\dfrac{d\vec{z_1}}{dt}\right]_{R_0}$
Or

- $\left.\dfrac{d\vec{y_2}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d\vec{y_2}}{dt}\right|_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\vec{y_2} = -\dot{\alpha}_2\vec{x_2} + \dot{\alpha}_1\sin(\alpha_2)\vec{z_1}$
- $\left.\dfrac{d\vec{y_3}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d\vec{y_3}}{dt}\right|_{R_3} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}}\wedge\vec{y_3} = -(\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_3)\vec{x_3} + \dot{\alpha}_1\sin(\alpha_2+\alpha_3)\vec{z_1}$
- $\left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d\vec{x_3}}{dt}\right|_{R_3} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}}\wedge\vec{x_3} = (\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_3)\vec{y_3} - \dot{\alpha}_1\cos(\alpha_2+\alpha_3)\vec{z_1}$
- $\left.\dfrac{d\vec{z_1}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d\vec{z_1}}{dt}\right|_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\vec{z_1} = \dot{\alpha}_1\vec{x_1}$
- $\left.\dfrac{d\mu}{dt}\right]_{R_0} = -\dot{\alpha}_2\sin(\alpha_2) + \dot{\lambda}\cos(\alpha_2+\alpha_3) - \lambda(\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_3)\sin(\alpha_2+\alpha_3)$

Il ne reste *plus qu'à* compiler tout.