Barrage poids - corrigé

Q.1. **Exprimer $d\vec{f}(Q)$**

$$d\vec{f}(Q) = -p(z)dS\vec{n} = \rho_e g(h-z).dz.dy.\vec{x}$$

Q.2. **Calculer en O, le torseur des actions mécaniques de contact exercées par l'eau sur toute la surface du barrage.**

$$\{\mathcal{T}_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{o,2\to1}} \end{Bmatrix}_o = \begin{Bmatrix} \int_{\forall M\in S} d\vec{f}(Q) \\ \int_{\forall M\in S} \overrightarrow{dM_o(d\vec{f}(Q))} \end{Bmatrix}_o$$

$$\overrightarrow{R_{2\to1}} = \iint \rho_e g(h-z).dz.dy.\vec{x} = \rho_e g \int_0^h (h-z).dz \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy\,\vec{x} = \rho_e g \left[hz - \frac{z^2}{2}\right]_0^h [y]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{x} = \rho_e g \frac{h^2}{2} L.\vec{x}$$

$$\overrightarrow{dM_o(d\vec{f}(Q))} = \overrightarrow{OQ} \wedge d\vec{f}(Q) = (z\vec{z} + y\vec{y}) \wedge \rho_e g(h-z).dz.dy.\vec{x} = p(z).dz.dy(z\vec{y} - y\vec{z})$$

Avec $\overrightarrow{OQ} = z\vec{z} + y\vec{y}$

Soit en global :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_{o,2\to1}} &= \iint z.\rho_e g(h-z).dz.dy.\vec{y} - \iint y.\rho_e g(h-z).dz.dy.\vec{z} \\
&= \rho_e g \int_0^h z(h-z).dz \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy\,\vec{y} - \rho_e g \int_0^h (h-z).dz \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y dy\,\vec{z} \\
&= \rho_e g \left[\frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^h [y]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{y} - \rho_e g \left[hz - \frac{z^2}{2}\right]_0^h \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{z} \\
&= \rho_e g \frac{h^3}{6} L.\vec{y} + 0.\vec{z}
\end{aligned}$$

Ce qui semble logique, les forces qui génèrent des moments suivants $\vec{z}$ se compensent deux à deux car O est sur le plan de symétrie du barrage par rapport aux forces. Cette propriété n'est pas vraie pour les moments générés suivants $\vec{y}$ car les forces n'ont pas de plan de symétrie $(\vec{x},\vec{y})$, en effet les forces augmentes avec la profondeur.

Finalement :

$$\{\mathcal{T}_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{o,2\to1}} \end{Bmatrix}_o = \begin{Bmatrix} \rho_e g \frac{h^2}{2} L.\vec{x} \\ \rho_e g \frac{h^3}{6} L.\vec{y} \end{Bmatrix}_o$$

Q.3. **En déduire la position du centre de poussée P, tel que : $\overrightarrow{M_{P,2\to1}} = \vec{0}$**

On cherche P avec $\overrightarrow{OP} = y_p\vec{y} + z_p\vec{z}$ tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{M_{P,2\to1}}} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{M_{P,2\to1}} = \overrightarrow{M_{O,2\to1}} + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{R_{2\to1}}$$

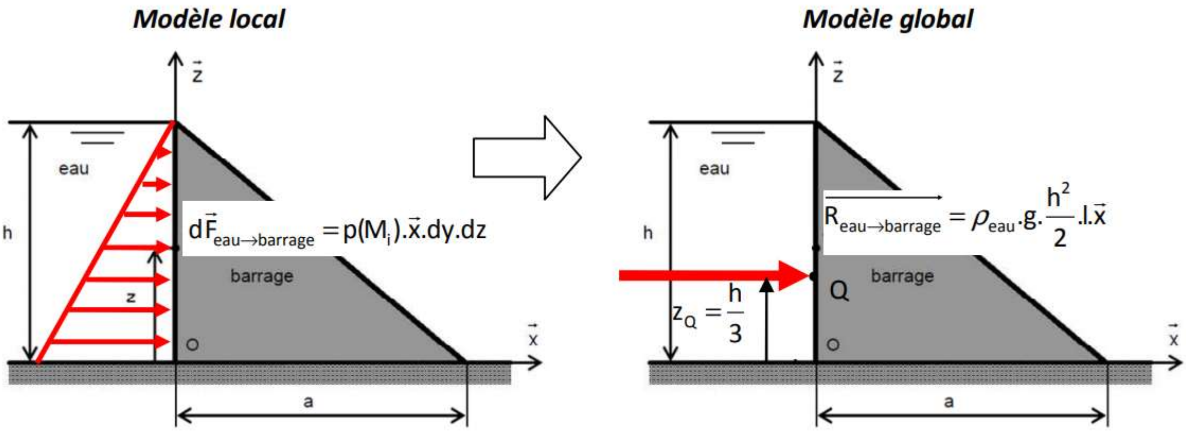
$$\overrightarrow{M_{P,2\to1}} = \overrightarrow{M_{O,2\to1}} + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{R_{2\to1}} = \rho_e g \frac{h^3}{6} L\vec{y} + \left(-y_p\vec{y} - z_p\vec{z}\right) \wedge \rho_e g \frac{h^2}{2} L.\vec{x}$$
$$= \rho_e g \frac{h^3}{6} L\vec{y} + \rho_e g z_p \frac{h^2}{2} L(y_p\vec{z} - z_p\vec{y})$$

Sur $\vec{z}$:

$$0 = \rho_e g z_p \frac{h^2}{2} L y_p \Rightarrow y_p = 0$$

Sur $\vec{y}$:

$$\rho_e g L h^2 \left(\frac{h}{6} - \frac{z_p}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; z_p = \frac{h}{3}$$



Système de levage de tramway - Corrigé

Q.1. Définir le torseur de l'action mécanique exercé par le tramway sur la colonne au point *P*.

L'action mécanique du tramway sur la colonne est une force appliquée en P, le torseur des actions mécanique s'écrit donc :

$$\{\mathcal{T}_{T\to C}\} = \begin{Bmatrix} -F_{T\to C}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P$$

Q.2. Donner son expression au point *O*.

$$\overrightarrow{M_{O,T\to C}} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_{T\to C}} = \left((d-e)\vec{y} + h\vec{z}\right) \wedge -F_{T\to C}\vec{z} = (e-d)F_{T\to C}\vec{x}$$
$$\{\mathcal{T}_{T\to C}\} = \begin{Bmatrix} -F_{T\to C}\vec{z} \\ (e-d)F_{T\to C}\vec{x} \end{Bmatrix}_O$$

Q.3. Déterminer l'expression de $q(y)$ en fonction de q_1 et de q_2.

La pression de contact est linéaire en y. Elle vaut q_1 pour $y = 0$ et q_2 pour $y = L$.

L'équation de la pression est donc $q(y) = q_1 + \frac{q_2-q_1}{L} y$

Q.4. **Donner l'expression de l'action élémentaire du sol sur la colonne appliquée en un point $\boldsymbol{Q}$ de la surface de contact entre la colonne et le sol $\boldsymbol{d\vec{f}_{S\rightarrow C}}$.**

L'action mécanique élémentaire en Q est dirigée selon $\vec{z}$ et est proportionnelle à la pression de contact et à la surface de contact : $d\vec{f}_{S\rightarrow C} = q(y)dxdy\vec{z}$. En effet, $dxdy$ est la surface élémentaire de contact au point Q.

Q.5. **Déterminer l'expression de ce torseur des actions élémentaires au point O.**

$$d\vec{m}_{O,S\rightarrow C} = \overrightarrow{OQ} \wedge d\vec{f}_{S\rightarrow C} = (x\vec{x} + y\vec{y}) \wedge q(y)dxdy\vec{z} = q(y)dxdy(y\vec{x} - x\vec{y})$$

$$\left\{\mathcal{T}_{S\rightarrow C}^{élem}\right\} = \left\{\begin{matrix} q(y)dxdy\vec{z} \\ q(y)dxdy(y\vec{x} - x\vec{y}) \end{matrix}\right\}_O$$

Q.6. **Par intégration sur l'ensemble de la surface de contact, déterminer :**

a) $\boldsymbol{\vec{F}_{S\rightarrow C}}$

$$\boldsymbol{\vec{F}_{S\rightarrow C} = \int_{x=-a}^{x=-a+b} \int_{y=0}^{y=L} \left(q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} y\right) dxdy\vec{z} + \int_{x=a-b}^{x=a} \int_{y=0}^{y=L} \left(q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} y\right) dxdy\vec{z}}$$

$$\vec{F}_{S\rightarrow C} = \int_{x=-a}^{x=-a+b} dx \int_{y=0}^{y=L} \left(q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} y\right) dy\vec{z} + \int_{x=a-b}^{x=a} dx \int_{y=0}^{y=L} \left(q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} y\right) dy\vec{z}$$

$$\vec{F}_{S\rightarrow C} = b\left(q_1 L + \frac{q_2 - q_1}{L}\frac{L^2}{2}\right)\vec{z} + b\left(q_1 L + \frac{q_2 - q_1}{L}\frac{L^2}{2}\right)\vec{z}$$

$$\vec{F}_{S\rightarrow C} = 2b\left(q_1 L + \frac{q_2 - q_1}{2} L\right)\vec{z} = 2bL\left(q_1 + \frac{q_2 - q_1}{2}\right)\vec{z}$$

$$\vec{F}_{S\rightarrow C} = bL(q_1 + q_2)\vec{z}$$

On peut aussi considérer qu'un seul côté et le multiplier par deux par symétrie.

b) $\boldsymbol{\vec{M}_{0,S\rightarrow C} \cdot \vec{x}}$

$$\boldsymbol{\vec{M}_{0,S\rightarrow C} \cdot \vec{x} = \int_{x=-a}^{x=-a+b} \int_{y=0}^{y=L} \left(q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} y\right) ydxdy + \int_{x=a-b}^{x=a} \int_{y=0}^{y=L} \left(q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} y\right) y\,dxdy}$$

$$\vec{M}_{0,S\rightarrow C} \cdot \vec{x} = \int_{x=-a}^{x=-a+b} dx \int_{y=0}^{y=L} \left(q_1 y + \frac{q_2 - q_1}{L} y^2\right) dy + \int_{x=a-b}^{x=a} dx \int_{y=0}^{y=L} \left(q_1 y + \frac{q_2 - q_1}{L} y^2\right) dy$$

$$\vec{M}_{0,S\rightarrow C} \cdot \vec{x} = b\left(\frac{q_1 L^2}{2} + \frac{q_2 - q_1}{L}\frac{L^3}{3}\right) + b\left(\frac{q_1 L^2}{2} + \frac{q_2 - q_1}{L}\frac{L^3}{3}\right)$$

$$\vec{M}_{0,S\rightarrow C} \cdot \vec{x} = 2bL^2\left(\frac{q_1}{2} + \frac{q_2 - q_1}{3}\right)$$

$$\vec{M}_{0,S\rightarrow C} \cdot \vec{x} = bL^2 \frac{2q_2 + q_1}{3}$$

c) $\vec{M}_{0,S\to C} \cdot \vec{y}$

$$\vec{M}_{0,S\to C} \cdot \vec{y} = -\int_{x=-a}^{x=-a+b} \int_{y=0}^{y=L} \left(q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} y\right) x dx dy - \int_{x=a-b}^{x=a} \int_{y=0}^{y=L} \left(q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} y\right) x\, dx dy$$

$$\vec{M}_{0,S\to C} \cdot \vec{y} = -\int_{x=-a}^{x=-a+b} x dx \int_{y=0}^{y=L} \left(q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} y\right) dy - \int_{x=a-b}^{x=a} x dx \int_{y=0}^{y=L} \left(q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} y\right) dy$$

$$\vec{M}_{0,S\to C} \cdot \vec{y} = \frac{a^2 - (b-a)^2}{2}\left(\frac{q_1 L^2}{2} + \frac{q_2 - q_1}{L}\frac{L^3}{3}\right) + \frac{(b-a)^2 - a^2}{2}\left(\frac{q_1 L^2}{2} + \frac{q_2 - q_1}{L}\frac{L^3}{3}\right)$$

$$\vec{M}_{0,S\to C} \cdot \vec{y} = 0$$

(car de la forme $A * B - A * B$)

Q.7. **En déduire les expressions littérales de q_1 et de q_2.**

Le principe fondamental de la statique appliqué à une colonne s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{T\to C}\} + \{\mathcal{T}_{Sol\to C}\} = \begin{Bmatrix} -F_{T\to C}\vec{z} \\ (e-d)F_{T\to C}\vec{x} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} bL(q_1+q_2)\vec{z} \\ bL^2 \dfrac{2q_2 + q_1}{3}\vec{x} \end{Bmatrix}_O = \{0\}$$

On obtient donc un système à deux équations :

$$\begin{cases} F_{T\to C} = bL(q_1 + q_2) \\ (d-e)F_{T\to C} = bL^2 \dfrac{2q_2 + q_1}{3} \end{cases}$$

Après résolution $q_1 = \frac{2L - 3(d-e)}{bL^2} F_{T\to C}$ et $q_2 = \frac{3(d-e) - L}{bL^2} F_{T\to C}$

Q.8. **En déduire alors la plage possible de variation du paramètre d.**

Avec les résultats précédant on obtient :

$$\begin{cases} q_1 > 0 \\ q_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2L - 3(d-e) > 0 \\ 3(d-e) - L > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d < \dfrac{2L}{3} + e \\ d > \dfrac{L}{3} + e \end{cases}$$

Il faut donc avoir la relation $\frac{L}{3} + e < d < \frac{2L}{3} + e$

Q.9. **Avec les valeurs numériques données, vérifier la stabilité de la colonne et déterminer la valeur de la pression de contact maximale P_{max} entre les pieds et le sol. Conclure quant au respect du cahier des charges.**

<u>AN</u> de la relation précédente :

$$\frac{L}{3} + e = \frac{600}{3} + 110 = 310 \text{ mm et } \frac{2L}{3} + e = \frac{2 * 600}{3} + 110 = 510 \text{ mm}$$

Or $d = 480$ mm, la condition sur d est respectée, il n'y a donc pas décollement de la semelle.

$$q_1 = \frac{2 * 600 - 3(480 - 110)}{200 * 600^2} * 60\,000 = 0{,}075 \text{ MPa}$$

$$q_2 = \frac{3(480 - 110) - 600}{200 * 600^2} * 60\,000 = 0{,}425 \text{ MPa}$$

D'où $P_{max} = 0{,}425$ MPa < 8 MPa donc le critère de non détérioration du sol est largement respecté.