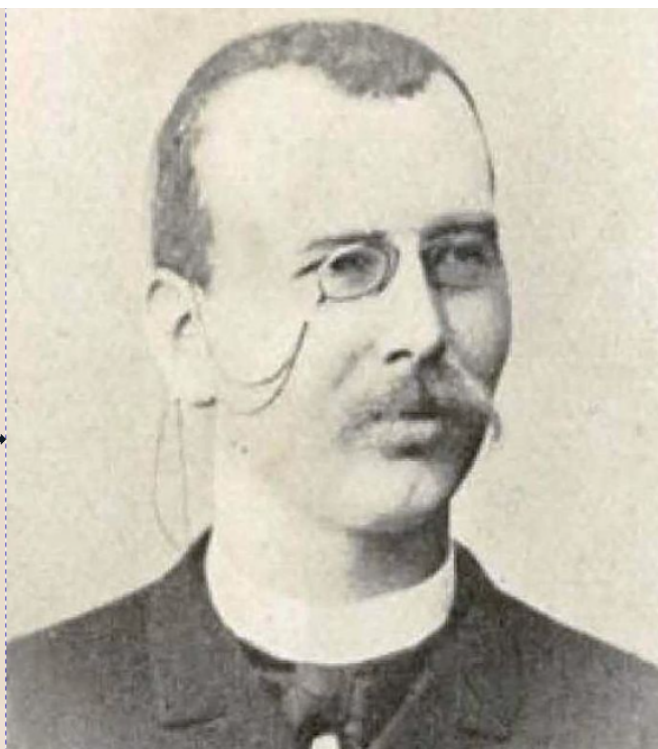


Table des matières




1 Les dimensions en physique-chimie	3
1.1 Un peu de vocabulaire et de méthode	3
1.2 Les sept dimensions du système international.	4
1.3 Équation aux dimensions	4
1.4 Comment trouver la dimension d'une grandeur <i>a priori</i> inconnue?	5
1.5 Applications	7
2 Retrouver/Construire une expression par analyse dimensionnelle	8
2.1 Construire une expression par analyse dimensionnelle	8
2.2 Discuter l'influences des grandeurs physiques	9



Savoirs ♥

- ▷ ♥ vocabulaire : grandeur physique, dimension, équation aux dimensions, SI
- ▷ ♥ les 7 dimensions du système internationale et les unités associées
- ▷ ♥ les conventions d'écritures ($[X]$, M/L/T/...) d'une équation aux dimensions
- ▷ ♥ les règles de calculs sur les dimensions :
 - ▷ somme
 - ▷ multiplication
 - ▷ division
 - ▷ puissance
 - ▷ dérivée
 - ▷ intégrale
 - ▷ fonction mathématiques

Savoir Faire

-  Vérifier si l'expression d'une grandeur physique est homogène.
-  Retrouver les unités/dimensions d'une grandeur physique.
-  Trouver une expression d'une grandeur physique à l'aide des dimensions.

Problématique

L'analyse dimensionnelle est une méthode/un truc/une astuce qui peut s'appliquer à n'importe quel domaine scientifique qui utilise des **unités** (*adieu les maths donc ...*). Pour comprendre sa portée prenons un exemple.

A une question de mécanique je dois exprimer la vitesse v d'un skieur glissant sur une pente. Je trouve alors :

$$v = \sqrt{2gh \cos \alpha}$$

avec g l'accélération de la pesanteur, l la longueur parcourue par le skieur et α l'angle de la pente.

Une question légitime alors : **mon expression trouvée est-elle juste ?**

1 Les dimensions en physique-chimie

1.1 Un peu de vocabulaire et de méthode

Définition. Grandeur physique, mesurage et mesure

- ▷ Grandeur physique : la caractéristique d'une entité, d'un processus, d'un évènement qui peut être **mesurable**.
- ▷ Mesurage : tout procédé expérimental visant à obtenir une information **quantitative** sur une grandeur physique.
- ▷ Mesure : le **résultat** d'un mesurage. Une mesure possède deux écritures : une expression littérale et une valeur.

Définition. Expression littérale

Une expression littérale d'une grandeur est une expression mathématiques où tous les paramètres sont représentés par des lettres/symboles.

Exemple 1 :

🚫🚫🚫 **Attention !** Il ne faut pas tout mélanger !!

Méthode en DS.

Exemple 2 : Structure de réponse type

Théorème de l'énergie mécanique :

▷ point A : $z_A = 0$ et $v_A = 0$

▷ point B : $z_B = h \sin \alpha$ et $v_B = v$

Pas de perte énergétique donc $E_m(B) - E_m(A) = 0$ soit :

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh \sin \alpha = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh \sin \alpha \Rightarrow v^2 = 2gh \sin \alpha$$

On a alors $v = \sqrt{2gh \sin \alpha}$.

AN : $v = 15,6 \text{ m.s}^{-1}$.

On a trouvé notre expression de la vitesse! Reste la question : comment vérifier si ma réponse est juste? Et au fait, c'est quoi les unités de g : $g = 9,81 \dots$?

1.2 Les sept dimensions du système international

Définition. Dimension d'une grandeur physique

La dimension d'une grandeur physique renseigne sur sa **nature physique**. Deux grandeurs physiques de même dimension (*i.e.*) de même nature peuvent être comparées.

Exemple 3 :

Propriété. Dimension et Unités du Système Internationale (SI)

La dimension de n'importe quelle grandeur physique peut toujours s'exprimer en fonction des sept dimensions du système international. Il est constitué des dimensions suivantes (avec leur notation littérale standard) :

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !**

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !**

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !**

1.3 Équation aux dimensions

Définition. Equation aux dimensions

Exemple 4 : On note m ma masse. On peut alors écrire :

Forme générale d'une équation aux dimensions :

Toute équation aux dimensions peut s'écrire comme :

$$[X] = L^a T^b M^c \theta^d N^e I^f J^g.$$

Les nombres a, b, c, d, e, f, g sont les **exposants dimensionnels** de X .

Propriété. Produit et quotient

Exemple 5 :

- ▷ une voiture roule à vitesse **constante** v . Cette dernière s'exprime comme le rapport de la distance parcourue d sur le temps de parcours τ . On a donc :

- ▷ Un angle est le rapport de deux longueurs L_1 et L_2 :

Exemple 6 : Donner la dimension de la grandeur X définie par :

$$X = \frac{d^2}{v^2}$$

avec d une distance et v une vitesse.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Application 1 : Soit τ un temps, v une vitesse et d une distance. Donner la dimension des grandeurs : τv ; $(\tau/d)^2$; \sqrt{dv} ; $\sqrt{\frac{d}{v\tau}}$.

1.4 Comment trouver la dimension d'une grandeur a priori inconnue ?

Les grandeurs physiques sont reliées entre elles :

- ▷ par des équations qui les définissent
- ▷ par des principes de bases de modèle physique

Méthode en DS. Retrouver les unités/dimension d'une grandeur

Exemple 7 : L'accélération :

► Dimension et règles de calcul

Il arrive souvent en physique qu'une grandeur soit donnée par une expression mathématiques qui fait apparaître autres choses que des multiplication ou des divisions.

On retiendra les règles suivantes :

- ▷ produit, division et puissance :

- ▷ manipuler des nombres :

- ▷ les termes d'une somme ou d'une différence ont la même dimension

▷ une fonction mathématiques

▷ la dimension des dérivées et intégrales

Retour sur l'exemple introductif

| *Exemple 8* : Vérifier que la grandeur $v = \sqrt{2gh \cos \alpha}$ obtenue précédemment est bien une vitesse.

.....

.....

.....

.....

.....

Définition. Homogénéité

Une équation est dite homogène si les termes de chaque côté de l'égalité possèdent la même dimension.

Propriété. Règle d'or

Une formule non homogène est nécessairement fautive

Autrement dit si $[A] \neq [B]$ alors $A \neq B$.

Méthode en DS. Vérifier une expression littérale

1.5 Applications

Exemple 9 : La vitesse d'une bille dans un fluide visqueux est donnée par :

$$v : t \rightarrow Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Donner les dimensions de A et τ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

| **Application 2** : Vérifier la dimension de g , accélération de la pesanteur terrestre.

| **Application 3** : Vérifier que l'énergie cinétique $E_{cin} = mv^2/2$ et l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pot} = mgh$ possèdent bien la même dimension.

Application 4 : On note R la résistance électrique équivalente à deux résistances R_1 et R_2 en série. Quelle sont les relations nécessairement fausses ?

Astuce : on ne connaît pas la dimension d'une résistance ? Ce n'est pas un problème, on pourra la manipuler comme $[R]$ et la dimension des termes de droite devra être $[R]$.

- | | | | |
|----|-------------------------------------|----|--|
| 1. | $R = R_1 + R_2$ | 5. | $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ |
| 2. | $R = R_1 R_2$ | 6. | $R = R_1 \cos(R_1 R_2)$ |
| 3. | $R = \sqrt{R_1 R_2}$ | 7. | $R = (R_1 + R_2) \exp[-\frac{R_1}{R_2}]$ |
| 4. | $R = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ | 8. | $R = \frac{R_1 + R_2}{2} \cos \left[1 + \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2} \right]$ |

2 Retrouver/Construire une expression par analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle (*i.e.* utiliser les dimensions) permet de retrouver l'expression d'une grandeur X (*i.e.* "retrouver la formule") si on sait :

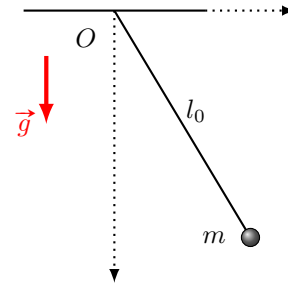
- ▷ quelle est la dimension de X
- ▷ quelles sont les autres grandeurs qui interviennent dans l'expression de X

Nous allons étudier la méthode de résolution à travers un exemple.

Période d'oscillation d'un pendule simple

Une masse m est attachée au bout d'un fil sans masse de longueur l_0 . La masse oscille librement sous l'action de la pesanteur g . Elle possède un mouvement périodique, de période T .

Donner une expression de la période à une constante numérique près.



2.1 Construire une expression par analyse dimensionnelle

Méthode en DS. Construire une expression à l'aide des dimensions

- ▷ Préciser les dimensions des différentes grandeurs : celle recherchée et celles utiles
- ▷ Ecrire l'expression sous la forme d'un produit d puissance, les puissances étant *a priori* inconnues
- ▷ Passer aux dimensions et construire un système d'équations avec les puissances
- ▷ Résoudre le système et retrouver l'expression

On va mettre ça en place !

- ▷ Préciser les dimensions des différentes grandeurs

- ▷ Écrire l'expression

- ▷ Passer aux dimensions et construire un système

▷ Résoudre le système

🔴🔴🔴 **Attention !** Cette méthode permet de retrouver la forme générale de la formule mais pas le facteur numérique devant.

Application 5 : Une masse m tombe d'une hauteur h sous l'effet de la pesanteur g . À l'aide de l'analyse dimensionnelle, estimer le lien entre la vitesse qu'aura la masse au moment de toucher le sol et ces différentes grandeurs.

Application 6 : On rappelle que l'intensité de la force d'attraction gravitationnelle entre deux corps de masse m_1 et m_2 séparé par une distance d est :

$$F = \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

1. Montrer que la dimension de \mathcal{G} est $[\mathcal{G}] = M^{-1}L^3T^{-2}$ et en déduire ses unités.
2. La vitesse d'un satellite en orbite géostationnaire autour de la Terre est susceptible de dépendre de la masse de la Terre M_T , du rayon de l'orbite R , et de la constante de gravitation \mathcal{G} . En donner une expression plausible.

2.2 Discuter l'influences des grandeurs physiques

On peut alors discuter l'influence des différentes grandeurs.

▷ influence de la masse :

▷ influence de la longueur :

Exemple 10 : Par combien faut-il multiplier la longueur du fil pour obtenir une période 10 fois plus grande ?

.....

.....

.....

.....

.....

Application 7 : Sur Terre ($g_T = 9,81m.s^{-2}$), je mesure avec mon pendule une période d'oscillation de $T = 2,5s$. J'embarque dans un vaisseau pour Mars ($g_M = 3,71m.s^{-2}$). Donner la nouvelle période d'oscillation du pendule.