Chap VIII Régime sinusoïdal forcé

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières


Savoirs ♡

- ▷ ♡ Régime transitoire et définition du RSF
  - ▷ lien solution homogène et le régime transitoire
  - ▷ Forme des signaux en RSF
  - ▷ Amplitude et déphasage par rapport au signal excitateur

- ▷ ♡ **Signaux complexes :**
  - ▷ écriture complexe d'un signal
  - ▷ propriété de dérivation et d'intégration

- ▷ ♡ **Impédances complexes :**
  - ▷ définition d'un impédance électrique
  - ▷ Impédance d'une résistance, d'un fil, d'un interrupteur ouvert
  - ▷ Condensateur : impédance complexe, comportement à haute et basse fréquence
  - ▷ Bobine : impédance complexe, comportement à haute et basse fréquence

- ▷ ♡ **Lois électriques en RSF :**
  - ▷ loi d'Ohm en RSF
  - ▷ Association d'impédances complexes
  - ▷ Pont diviseur de tension et courant

Savoir Faire

A partir d'une amplitude complexe savoir retrouver
- ▷ *l'amplitude réelle*
- ▷ *le déphasage*
- ▷ *le signal réel*

Associer des impédances complexes en série et en parallèle pour écrire l'impédance équivalente d'une portion de circuit

Retrouver l'équation différentielle d'un circuit par la RSF

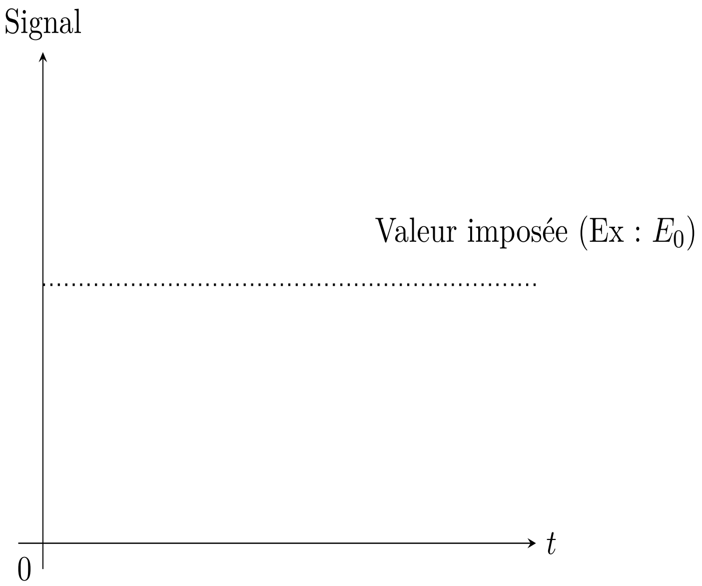
Appliquer pont diviseur de tension et courant pour obtenir les grandeurs électriques en d'un signal de référence

Etude d'un circuit électrique en RSF
- ▷ *Ecrire les signaux en complexe*
- ▷ *Associer des dipôles pour simplifier le circuit*
- ▷ *appliquer un pont diviseur pour obtenir la grandeur électrique recherchée*

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié la réponse d'un système, qu'il soit électrique (circuit RC, circuit RLC, ...) ou mécanique (système masse ressort, balançoire, ...)

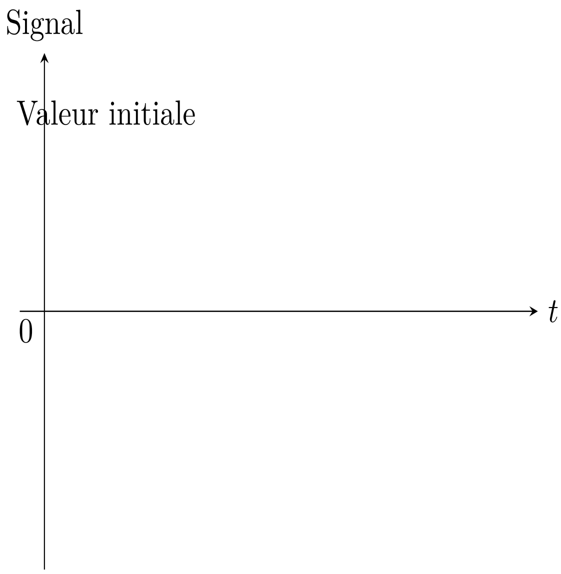
en réponse indicielle :
on force le système à prendre une certaine valeur.

Ex : Oscillateur amorti



en régime libre :
retour à la position d'équilibre

Ex : Oscillateur amorti



Mais il existe un troisième régime : lorsqu'on fait de la balançoire, on donne, à un rythme régulier, une impulsion au système. L'élément excitateur (nos bras) produit un signal périodique : dans l'exemple du circuit RLC c'est comme si la tension du générateur était dépendante du temps

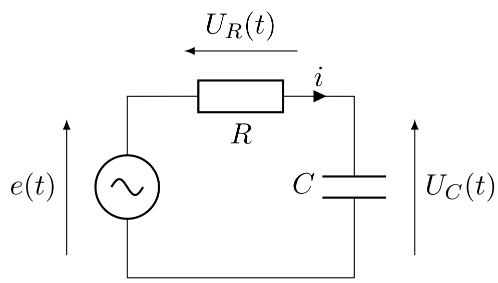
$$E_0 \to E_0(t)$$

1 Le régime sinusoïdal forcé

1.1 Exemple du circuit RC série

Prenons le cas d'un circuit RC série. Le générateur qui l'alimente fournit désormais non plus une tension E_0 constante mais une tension $e(t)$ qui varie dans le temps.
On trouve facilement l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}U_C(t) = e(t)$$



▶ **Décomposition de la solution :**

Elle est similaire à celle qu'on a déjà rencontré sauf que désormais le membre de droite, via $e(t)$, dépend du temps. Néanmoins, la décomposition en deux de la solution reste vraie :

$$U_C(t) = U_{C,H}(t) + U_{C,P}(t)$$

▷ $U_{C,P}(t)$ une solution particulière.
▷ $U_{C,H}(t)$ est la forme générale de l'équation homogène

$$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}U_C(t) = 0$$

Elle est donc la même que celle rencontrée avant. On retiendra la propriété générale suivante

▶ **Comportement aux temps longs**

Propriété. Solution homogène
Au bout d'une durée $\mathcal{T}$ (durée du régime transitoire), la solution homogène tend vers zéro.

On a :

$$U_C(t) = U_{C,H}(t) + U_{C,P}(t) \rightarrow_{t>>\mathcal{T}} U_C(t) \simeq U_{C,P}(t)$$

Propriété. Solution particulière
La solution homogène représente le **régime permanent**, au sens où cette fonction ne diminue pas d'amplitude en fonction du temps.

Problème :
Comme $e(t)$ dépend du temps, prendre une constante ne fonctionne plus. Lorsque le signal excitateur dépend du temps, la solution particulière dépend également du temps.

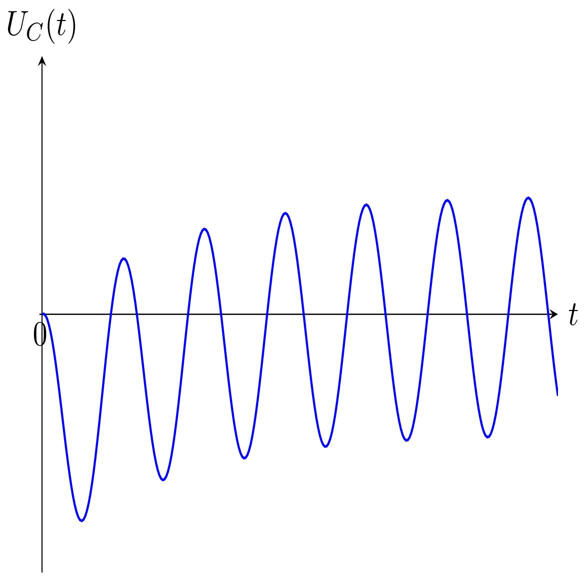
1.2 Définition du Régime Sinusoïdal Forcé (RSF)

On choisit désormais une tension $e(t)$ sinusoïdal :

$$e(t) = e_0 \cos \omega t$$

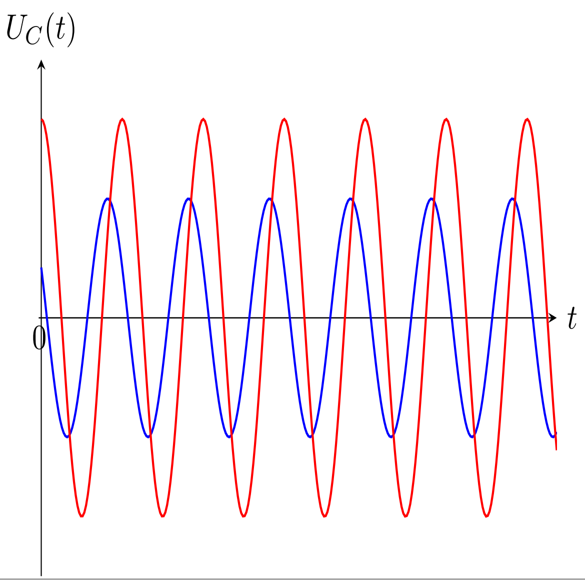
avec $\omega = 3$kHz. On trace ci-contre la solution de l'équation différentielle du circuit précédent.

On remarque qu'au bout d'une durée $\mathcal{T}$ l'amplitude du signal est bien constante et il semble être un signal lui aussi sinusoïdal.
C'est ce qu'on appelle le Régime Sinusoïdal Forcé, ou RSF.



Définition. RSF (régime sinusoïdal forcé)
Le **régime sinusoïdal forcé** correspond au régime permanent (aux temps longs) d'un système physique lorsque l'élément excitateur est de forme sinusoïdale.

Vocabulaire : "on se place en RSF" : "on se place aux temps long $t > \mathcal{T}$, durée du régime transitoire, et on cherche la solution particulière.



On remarque que si on mesure le signal $e(t)$ (en rouge) et le signal $U_C(t)$ (en bleu) :
- ▷ ils n'ont pas la même amplitude
- ▷ ils ont la même fréquence
- ▷ il existe un décalage entre les deux courbes ⇒ il existe un déphasage entre les deux signaux

Propriété. Forme du signal en RSF
En RSF, les différents signaux mesurables en sortie seront tous des signaux sinusoïdaux de même pulsation que le signal excitateur.

$$\boxed{x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)}$$

- ▷ X_0 l'amplitude du signal de sortie
- ▷ φ le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

Attention ! La pulsation ω est la même que celui du générateur !

> *Exemple 1 : Circuit RC :*
> *On aura donc une tension $U_C(t)$ qui s'écrit comme :*
>
> $$U_C(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$$
>
> *avec $\omega = 3kHz$.*
>
> ***Attention !*** *Les deux constantes X_0 et φ dépendent de la pulsation ω.*

But du jeu :
trouver la solution particulière, c'est-à-dire trouver l'amplitude X_0 et la phase φ du signal de sortie aux temps longs.

Astuce : on utilise les complexe !!

2 La notation complexe pour l'étude des signaux

2.1 Rappel mathématique sur les nombres complexes

Définition. Nombre complexe j
Lors de l'étude des signaux, on note j le nombre complexe tel que

$$\boxed{j^2 = -1}\,.$$

Attention ! On utilise cette notation pour ne pas confondre ce nombre complexe avec le courant électrique, noté généralement i.

♡ *Instant math* ♡

Un nombre complexe z peut s'écrire de deux façons différentes :

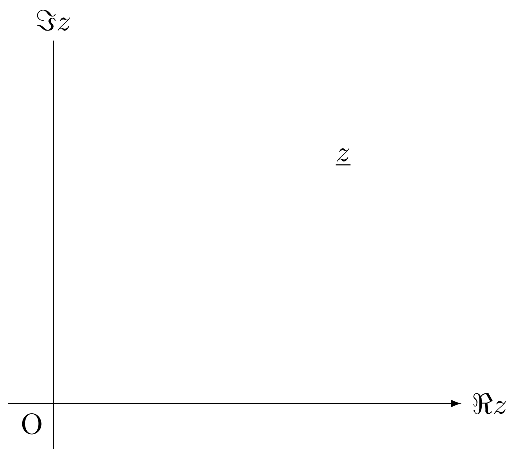
$$z = a + ib \text{ ou } z = Z_0 e^{j\phi}$$

- ▷ a : partie réelle
- ▷ b partie imaginaire
- ▷ Z_0 module
- ▷ ϕ argument

On a :

$$Z_0 = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \tan\phi = \frac{b}{a}$$

On utilise aussi : $\cos\phi = \dfrac{a}{Z_0}$ et $\sin\phi = \dfrac{b}{Z_0}$.



> *Application 1 : Quelle est la notation exponentielle du nombre j ? Et celle de $1/j$?*

2.2 L'amplitude complexe d'un signal

Propriété. Formule d'Euler
Prenons la fonction réelle $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$. $x(t)$ est la partie réelle d'une exponentielle complexe :

$$\boxed{X_0 \cos(\omega t + \varphi) = \Re\left(X_0 \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi)}\right)}\,.$$

On peut faire le lien entre un signal sinusoïdal et un signal complexe. Toute équation vraie en réel est vraie en notation complexe.

Exemple 2 : L'équation différentielle du circuit RC en réelle

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C(t) = e(t)$$

se réécrit en complexe :

$$\frac{d\underline{U_C}}{dt} + \frac{1}{RC}\underline{U_C}(t) = \underline{e}(t)$$

Attention ! *on pense bien à écrire e en complexe $\underline{e}$!*

Définition. Signal et amplitude complexe
Soit le signal physique $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

- Sa notation complexe est $\underline{x(t)} = X_0 \mathrm{e}^{j\varphi} \mathrm{e}^{j\omega t}$.
- On note l'**amplitude complexe** du signal $x(t)$

$$\boxed{\underline{X_0} = X_0 \mathrm{e}^{j\varphi}}\,.$$

Propriété. Retour au réel
A partir de l'amplitude complexe, on déduit

- l'**amplitude réelle** du signal $\boxed{X_0 = |\underline{X_0}|}$;
- la **phase** du signal $\boxed{\varphi = \arg \underline{X_0}}$.

Attention ! Le soulignement permet de ne pas oublier que l'on manipule des grandeurs complexes.

Exemple 3 : On donne le signal complexe $\underline{u}(t) = \dfrac{e_0}{jRC\omega} e^{j\omega_0 t}$. Donner le signal réel $u(t)$ associé.

L'amplitude complexe est : $\underline{U_0} = \dfrac{e_0}{jRC\omega}$.

- *On calcule le module :*

$$|\underline{U_0}| = \frac{e_0}{|jRC\omega|} = \frac{e_0}{RC\omega}$$

- *On calcule l'argument :*

$$\arg \underline{U_0} = \arg \frac{e_0}{jRC\omega} = \arg[e_0] - \arg[jRC\omega] = 0 - \pi/2$$

Finalement :

$$u_c(t) = |\underline{U_0}| \cos(\omega t + \arg \underline{U_0}) = \frac{e_0}{RC\omega} \cos(\omega t - \pi/2)$$

Objectif RSF

Trouver l'amplitude X_0 et la phase φ du signal $\Rightarrow$ trouver l'amplitude complexe $\underline{X_0}$.

$$\underline{X_0} \rightarrow \begin{cases} X_0 = |\underline{X_0} \\ \varphi = arg(\underline{X_0}) \end{cases}$$

2.3 Dérivations et intégrations en notations complexes

Plutôt que manipuler $x(t) = X_0 \cos \omega t$ on manipule $\underline{x}(t) = \underline{X_0} e^{j\omega t}$. Voyons les deux opérations de base : dérivation et intégration.

▶ Dérivation

Calculons la dérivée du signal complexe $\underline{x}(t) = \underline{X_0} e^{j\omega t}$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underline{X_0} e^{j\omega t}\right) = \underline{X_0}\frac{\mathrm{d}e^{j\omega t}}{\mathrm{d}t} = \underline{X_0} j\omega e^{j\omega t} = j\omega \underline{X}(t) \ .$$

Propriété. Dérivation
La dérivation du signal complexe $\underline{X}(t)$ correspond à une multiplication par $j\omega$.

> ***Exemple 4 :*** *Comment manipuler une dérivée d'ordre 2 ?*
>
> $$\frac{\mathrm{d}^2\underline{x}(t)}{dt^2} = \frac{\mathrm{d}}{dt}\left[\frac{\mathrm{d}\underline{x}(t)}{dt}\right] = \frac{\mathrm{d}}{dt}\left[j\omega\underline{x}(t)\right] = j\omega\frac{\mathrm{d}}{dt}\left[\underline{x}\right] = j\omega \times j\omega\underline{x}(t)$$
>
> *Dérivée d'ordre 2 équivaut à multiplier par* $-\omega^2$

▶ Intégration

Calculons l'intégrale du signal complexe $\underline{x}(t)\underline{X_0} e^{j\omega t}$. On a :

$$\int \underline{x}(t)\mathrm{d}t = \int \underline{X_0} e^{j\omega t}\mathrm{d}t = \underline{X_0}\frac{e^{j\omega t}}{j\omega} = \frac{\underline{x}(t)}{j\omega}.$$

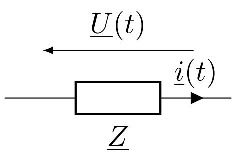
Propriété. Intégration
L'intégration du signal complexe $\underline{x}(t)$ correspond à une division par $j\omega$.

3 Comportement des dipôles en RSF, notion d'impédance électrique

3.1 Définition

Définition. Impédance électrique
En **électricité**, on définit **l'impédance** $\underline{Z}$ d'un dipôle comme le rapport entre la tension $\underline{U}(t)$ et le courant $\underline{i}(t)$ en convention récepteur.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}(t)}{\underline{i}(t)}$$



Vocabulaire : **L'admittance complexe** se définit par : $\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}}$

Propriété. Loi d'Ohm en RSF
En RSF tous les dipôles sont soumis à la loi d'Ohm en régime sinusoïdal forcé

$$\boxed{\underline{U}(t) = \underline{Z}\ \underline{i}(t)}.$$

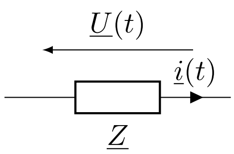
3.2 Impédance des dipôles usuels

▶ Les résistances

On a en régime réel la loi d'Ohm $U(t) = Ri(t)$, soit en régime complexe, on a donc $\underline{U}(t) = R\underline{i}(t)$.

Propriété. Impédance complexe d'une résistance

Fil et interrupteur



L'impédance $\underline{Z_R}$ d'une résistance R vaut $\boxed{\underline{Z_R} = R}$.
- ▷ Fil : $\underline{Z} = 0$
- ▷ Interrupteur ouvert : $\underline{Z} = +\infty$

▶ Les condensateurs

On a en régime réel la loi $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$, soit en régime complexe

$$\underline{i}(t) = C\frac{\mathrm{d}\underline{U}(t)}{\mathrm{d}t} = jC\omega\underline{U}(t)$$

Propriété. Impédance complexe d'un condensateur
L'impédance $\underline{Z_C}$ d'un condensateur C vaut $\boxed{\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega}}$.

▶ Les inductances

On a en régime réel la loi $U(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$, soit en régime complexe $\underline{U}(t) = L\dfrac{\mathrm{d}\underline{i}(t)}{\mathrm{d}t} = jL\omega\underline{i}(t)$.

Propriété. Impédance complexe d'une bobine
L'impédance $\underline{Z_L}$ d'une bobine L vaut $\boxed{\underline{Z_L} = jL\omega}$.

3.3 Comportement fréquentiel :

▶ Notion de comportement fréquentiel

Propriété.
Le comportement d'un circuit électrique en RSF dépend de la pulsation ω qu'impose le générateur au circuit.

Comportements limites :
- ▷ à haute fréquence : $\omega \to \infty$, la tension du générateur oscille très vite.
- ▷ à basse fréquence : $\omega \to 0$, la tension du générateur oscille très lentement.
  Cas limite $\omega = 0$ correspond à une tension $e(t)$ constante.

Vocabulaire : Etudier le comportement du circuit à $\omega \to \infty$ et $\omega \to 0$ est faire l'étude fréquentielle asymptotique du circuit.

▶ Comportement fréquentiel des dipôles usuels

Fil, interupteur ouvert, résistance :
L'impédance d'un fil, d'un interrupteur ouvert et d'une résistance ne dépendent pas de la pulsation ω : leur comportement est invariant quelque soit la fréquence du signal $e(t)$.

Condensateur
Pour un condensateur d'impédance $\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega}$
- ▷ basses fréquences : $\omega \to 0$
$$\underline{Z_C} \to +\infty$$
- ▷ hautes fréquences $\omega \to +\infty$
$$\underline{Z_C} \to 0$$

Propriété. Comportement asymptotique d'un condensateur
- ▷ à basse fréquence, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert
- ▷ à haute fréquence, un condensateur est équivalent à un fil

Inductance
Pour une bobine d'impédance $\underline{Z_L} = jL\omega$
- ▷ basses fréquences : $\omega \to 0$
$$\underline{Z_L} \to 0$$
- ▷ hautes fréquences $\omega \to +\infty$
$$\underline{Z_L} \to \infty$$

Propriété. Comportement asymptotique d'une bobine
- ▷ à basse fréquence, une bobine est équivalent à un fil
- ▷ à haute fréquence, une est équivalent à un interrupteur ouvert

3.4 Déphasage tension-courant

▶ Comparaison de signaux électroniques en RSF

Soient deux signaux électriques (tension ou intensité) $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Pour comparer ces deux signaux, on étudie :
- ▷ le rapport des amplitudes réelles X_1/X_2
- ▷ le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

On passe alors par l'étude des signaux complexes $\underline{x_1}(t)$ et $\underline{x_2}(t)$:
- ▷ Rapport des amplitudes réelles :
$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{|\underline{X_1}|}{|\underline{X_2}|} = \left|\frac{\underline{X_1}}{\underline{X_2}}\right|$$

▷ Déphasage :

$$\Delta\varphi = \arg \underline{x_1} - \arg \underline{x_2} = \arg\left[\frac{\underline{x_1}}{\underline{x_2}}\right] = \arg\left[\frac{\underline{X_1}}{\underline{X_2}}\right]$$

Propriété. Rapport d'amplitude et déphasage en RSF
Soient deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$:
▷ Rapport des amplitudes réelles :

$$\frac{X_1}{X_2} = \left|\frac{\underline{X_1}}{\underline{X_2}}\right|$$

▷ Déphasage :

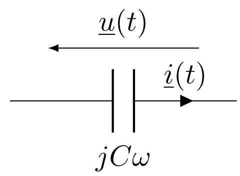
$$\Delta\varphi = \arg\left[\frac{\underline{X_1}}{\underline{X_2}}\right]$$

▶ Application aux condensateurs et bobines

Exemple 5 : En RSF, montrer qu'aux bornes d'un condensateur :

1. *l'amplitude du courant est celle de la tension multiplié par $C\omega$*
2. *le courant et la tension sont en quadrature de phase*

On adopte une représentation complexe des signaux :
▷ *tension : $u(t) = U_0\cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \underline{u}(t) = \underline{U_0}e^{j\omega t}$*
▷ *courant : $i(t) = I_0\cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \underline{i}(t) = \underline{I_0}e^{j\omega t}$*



La loi d'Ohm en RSF : $\underline{U_0} = \dfrac{\underline{I_0}}{jC\omega}$.

On s'intéresse alors au :

1. *rapport des amplitudes réels $I_0/U_0 = \left|\dfrac{\underline{I_0}}{\underline{U_0}}\right| = \left|\dfrac{\underline{I_0}}{\underline{I_0}/jC\omega}\right| = |jC\omega| = C\omega$*
2. *déphasage $\Delta\varphi = \arg\left[\dfrac{\underline{I_0}}{\underline{U_0}}\right] = \arg[jC\omega] = +\pi/2$*

Application 2 : Donner le rapport des amplitudes courant-tension et le déphasage courant-tension aux bornes d'une bobines et d'une résistance.

4 Lois de l'électrocinétique en régime sinusoïdal forcé

Les lois de l'électrocinétique restent vrai tant que le système reste dans le cadre de l'ARQS. En RSF, on peut appliquer la loi des mailles et la loi des noeuds.

Généralisation de la loi d'Ohm

Loi d'Ohm	Impédance complexe en RSF
$u = Ri$	$\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$

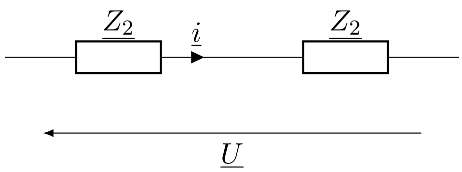
En RSF tous les dipôles se comportent comme des résistance, d'impédance complexe $\underline{Z}$ variant d'un dipôle à l'autre.
Les propriétés des résistances peuvent donc être appliquées à tous les dipôles en RSF.
Attention ! UNIQUEMENT EN RSF ! !

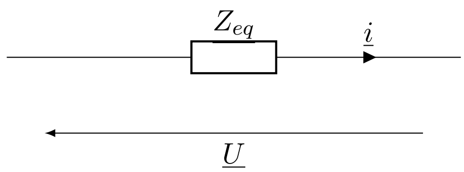
4.1 Association d'impédances

Les lois d'associations des impédances sont donc directement transposées des lois d'association des résistances.

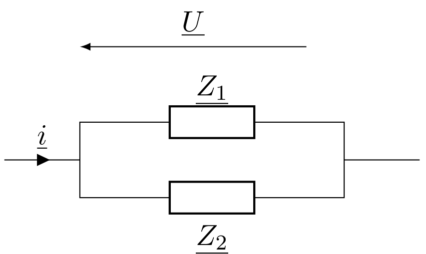
Propriété. Association de dipôle en RSF

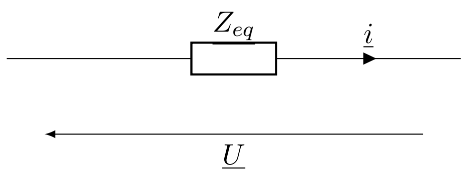
- $\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$ pour une association série



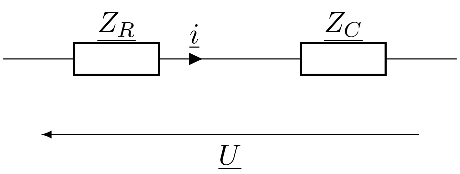


- $\dfrac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \dfrac{1}{\underline{Z_1}} + \dfrac{1}{\underline{Z_2}}$ pour une association en parallèle





Exemple 6 : Que vaut l'impédance d'une résistance R en série avec un condensateur C ? Quel est le comportement à hautes fréquences ? A basse fréquences ?



Association d'impédance en série :

$$\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_R} + \underline{Z_C} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{Z_{eq}} = \frac{jRC\omega + 1}{jC\omega}$$

Comportement asymptotique :

Méthode 1 : on calcule

- *à haute fréquence :*

$$\omega \to \infty \ : \ \underline{Z_{eq}} = \frac{jRC\omega + 1}{jC\omega} \to \frac{jRC\omega}{jC\omega} = R$$

le circuit se comporte comme une résistance.

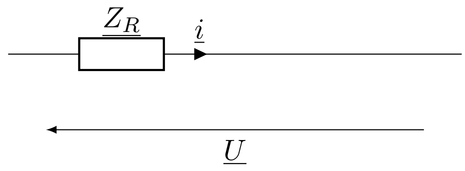
▷ *à basse fréquence :*

$$\omega \to 0 \ : \ \underline{Z_{eq}} = \frac{jRC\omega + 1}{jC\omega} \to \frac{1}{0} = +\infty$$

le circuit se comporte comme un interrupteur ouvert.

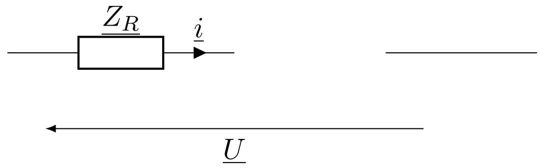
Méthode 2 : on remplace dans le circuit les dipôle par leur équivalent.

▷ *à haute fréquence :*



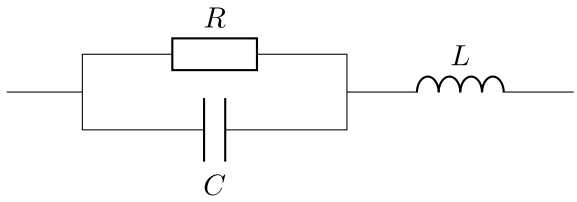
le circuit se comporte comme une résistance.

▷ *à basse fréquence :*



le circuit ne laisse passer aucune intensité : c'est un interrupteur ouvert.

Application 3 : *Quelle est l'impédance équivalente de l'ensemble ci-dessous.*



Donner les comportements asymptotiques.

4.2 Ponts diviseurs

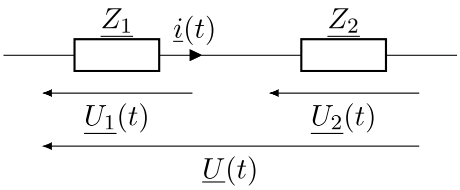
Les ponts diviseurs restent valables en régime sinusoïdal forcé et ils vont prendre une grande importance dans les études électriques. Les formules des ponts diviseurs en RSF s'obtiennent à partir de celles en réel en transformant les résistances en impédances.

Pont diviseur en RSF : Comme en régime "classique" mais $R \to \underline{Z}$

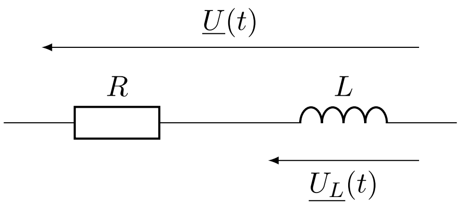
▶ **Le pont diviseur de tension**

Propriété. Pont diviseur de tension

$$\boxed{\underline{U_1}(t) = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{U}(t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{U_2}(t) = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{U}(t)}.$$



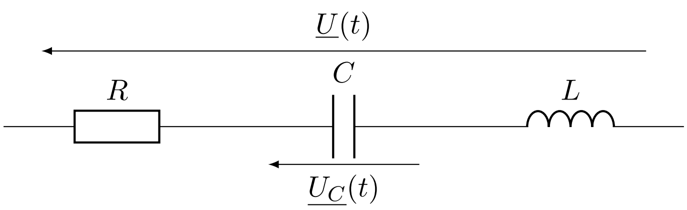
Exemple 7 : Quelle est l'expression de la tension $\underline{U_L}(t)$ dans le circuit ci-dessous en fonction de la tension $\underline{U}(t)$?

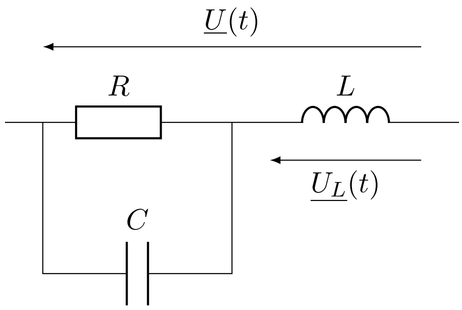


On reconnaît un pont diviseur de tension :

$$\underline{U_L} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}\underline{U}$$

Application 4 : Quelle est l'expression de la tension $\underline{U_C}(t)$ dans le circuit ci-dessous en fonction de la tension $\underline{U}(t)$?
Astuce : on pensera à associer deux dipôles avant d'utiliser un pont diviseur.





▶ Le pont diviseur de courant

Propriété. Pont diviseur de courant

$$\boxed{\underline{i_1}(t) = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{i}(t)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\underline{i_2}(t) = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{i}(t)}.$$

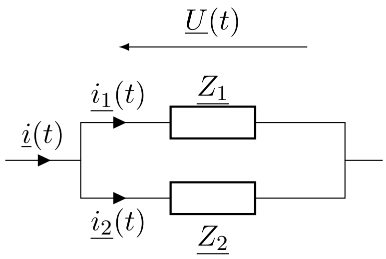
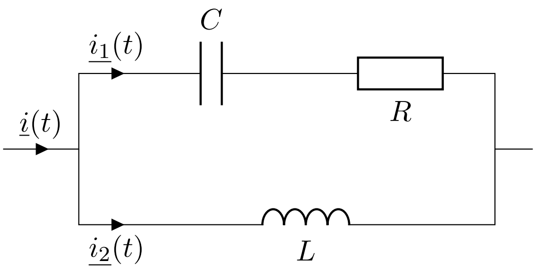


Fig. 1 – Le pont diviseur de courant.

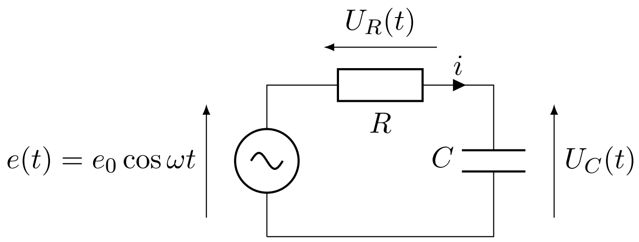
Application 5 : Quelles sont les expressions des intensités $\underline{i_1}(t)$ et $\underline{i_2}(t)$ dans le circuit ci-dessous en fonction de l'intensité $\underline{i}(t)$.



5 Étude du régime forcé d'un circuit

5.1 Etude en RSF d'une tension

Reprenons le problème du circuit RC étudié en début de chapitre : un générateur de tension sinusoïdale $e_0 \cos \omega t$ est branché sur un condensateur initialement déchargé en série avec une résistance.
Objectif : exprimer l'amplitude et le déphasage de la tension U_C aux bornes du condensateur.



Le déroulé de la résolution d'un exercice de RSF suit toujours ces premières étapes.

▶ **Passage en RSF**

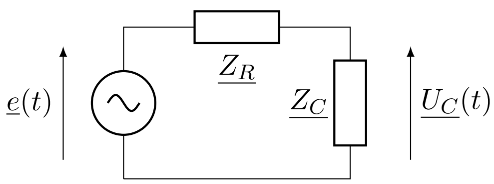
A mettre dans tout début d'exercice!!!
On se place en RSF, on adopte alors une représentation complexe des signaux.

$$\begin{cases} e(t) \to \underline{e}(t) = e_0 e^{j\omega t} \\ U_C(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi) \to \underline{U_C}(t) = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U_0} e^{j\omega t} \\ i(t) \to \underline{i}(t) \end{cases}$$

On cherche U_0 et φ.

▶ **Détermination de l'amplitude complexe**

Reprenons le circuit que nous réécrivons en terme d'impédances.



On reconnaît un pont diviseur de tension, soit

$$\underline{U_C}(t) = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R}} \underline{e}(t) = \frac{1/(jC\omega)}{1/(jC\omega) + R} \underline{e}(t) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}(t)$$

soit en simplifiant par $e^{j\omega t}$ pour se ramener uniquement aux amplitudes complexes, il vient à nouveau

$$\boxed{\underline{U_C} = \frac{e_0}{1 + jRC\omega}}.$$

Astuce pratique :
Trouver l'amplitude complexe se décompose le plus souvent en deux étapes :

1. on associe des dipôles entre eux pour parvenir à un pont diviser (tension ou courant) faisant apparaître la grandeur que l'on cherche
2. on applique un pont diviseur pour trouver la grandeur électrique cherchée

▶ Amplitude et déphasage

Que faire avec $\underline{U_C}$? On a $\underline{U_C}$, il ne nous reste plus qu'à calculer $|\underline{U_C}|$ et $\arg \underline{U_C}$ pour obtenir l'amplitude U_0 et le déphasage φ.

$$\underline{U_C} = \frac{e_0}{1 + jRC\omega}$$

Amplitude U_0

♡ *Instant math* ♡

$$\underline{z} = \frac{\underline{a}}{\underline{b}} \Rightarrow |\underline{z}| = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{b}|}$$

$$|\underline{U_C}| = \frac{|e_0|}{|1 + jRC\omega|} = \frac{e_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

Déphasage φ

♡ *Instant math* ♡

$$\underline{z} = \underline{a} \times \underline{b} \Rightarrow \arg \underline{z} = \arg \underline{a} + \arg underlineb$$
$$\underline{z} = \frac{\underline{a}}{\underline{b}} \Rightarrow \arg \underline{z} = \arg \underline{a} - \arg underlineb$$

$$\arg \underline{U_C} = \arg e_0 - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \arctan \frac{RC\omega}{1}$$

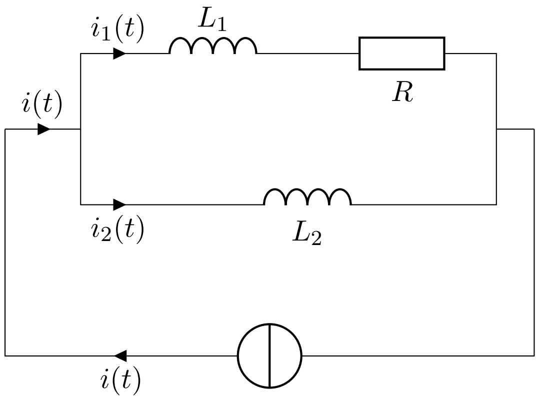
▶ Ecriture de la tension réelle

Aux temps longs, la tension aux bornes du condensateur est :

$$U_C(t) = \frac{e_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan RC\omega\right)$$

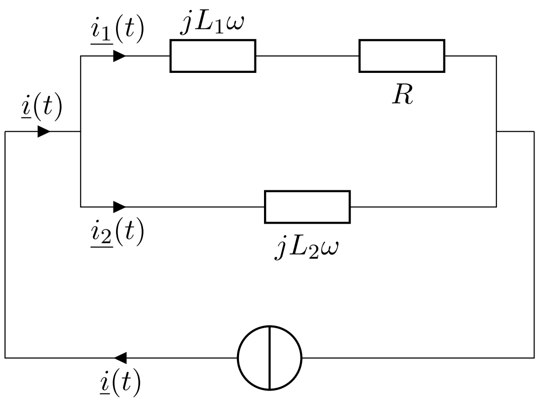
5.2 Obtenir une équation différentielle

Obtenir l'équation différentielle qui régit un circuit peut s'avérer pénible. L'étude des circuits électriques en RSF permet de simplifier les calculs.



Objectif : trouver l'équation différentielle qui décrit l'évolution de $i_1(t)$.

On se place en RSF et on utilise les notations complexes $\underline{i}$, $\underline{i_1}$, ...
Sur la branche du haut on peut associer en série les deux impédances :



$$\underline{Z_{eq}} = R + jL_1\omega$$

En utilisant un pont diviseur de courant on a :

$$\underline{i_1}(t) = \frac{jL_2\omega}{R + jL_1\omega}\underline{i}(t)$$

Pour obtenir une équation différentielle on réécrit l'égalité en éliminant les fractions :

$$(R + jL_1\omega)\underline{i_1}(t) = jL_2\omega\underline{i}(t)$$

$$R\underline{i}(t) + jL_1\omega\underline{i_1}(t) = jL_2\omega\underline{i}(t)$$

Et on se rappelle que : $\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = j\omega\underline{x}(t)$.
L'équation se réécrit comme :

$$R\underline{i}(t) + L_1\frac{\mathrm{d}\underline{i_1}}{\mathrm{d}t} = L_2\frac{{}_d d\underline{i}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Les équations électriques sont vraies aussi bien en complexe qu'en réel. Donc on repasse de $\underline{i_1} \to i_1$:

$$Ri(t) + L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

C'est bien une équation différentielle.