Semaine de colles n°1 du 19/09/22 au 23/09/22

• Exercices de révisions de terminale

Cf feuille d'exercices (sauf les équations différentielles et les dénombrements)

• Ensembles, logique et raisonnement

I à III - Éléments de logique

- Connecteurs logiques : disjonction ou conjonction de deux assertions, négation d'une assertion
- Implication, implication réciproque et contraposée, équivalence.

IV - Ensembles

- Parties, inclusion, réunion, intersection, complémentaire, différence de deux ensembles, produit cartésien.

V - Les quantificateurs

VI - Divers types de raisonnement

Récurrence simple, démontrer une implication (raisonnement direct ou contraposée), démontrer une équivalence (raisonnement direct ou double implication), raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse/synthèse. Ce dernier type de raisonnement a pour l'instant été très peu utilisé.

• Ordre sur $\mathbb{R}$ et inégalités

I – Les ensembles de nombres

II – Opérations dans $\mathbb{R}$

- Propriétés de l'addition et de la multiplication de réels.

III – Comparaison dans $\mathbb{R}$

- Propriétés de la comparaison dans $\mathbb{R}$, ordre total.
- Règles pour transformer une inégalité.

⚠ • Quand on multiplie (ou divise) une inégalité par une quantité, **ON ÉTUDIE D'ABORD SON SIGNE.**
• On ajoute des inégalités de même sens mais **ON NE LES SOUSTRAIT JAMAIS.**
• On multiplie des inégalités de même sens **QUE SI ELLES PORTENT SUR DES RÉELS POSITIFS.**

- Méthode pour démontrer une inégalité : utilisation du sens de variations d'une fonction, se ramener à une étude de signe, réaliser un tableau de signes, réaliser une étude de fonction, etc…
- Vocabulaire lié à l'ordre : Majorant/minorant, plus grand/petit élément, borne sup. /borne inf.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure
  Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

IV – Intervalles de $\mathbb{R}$

- Définition, classification.

V – Valeur absolue

- Définition, propriétés de calcul, interprétation en termes de distance.
- Lien avec les intervalles : $|x-a|=r \Leftrightarrow \ -r=x-a=r \ \Leftrightarrow \ x=a-r$ ou $x=a+r$

$$|x-a|\le r \Leftrightarrow \ -r\le x-a\le r \ \Leftrightarrow \ a-r\le x\le a+r \ \Leftrightarrow \ x\in [\,a-r, a+r\,].$$

$$|x-a|\ge r \Leftrightarrow \ x-a\le -r \text{ ou } x-a\ge r \ \Leftrightarrow \ x\in\,]-\infty, a-r]\cup[a+r,+\infty[$$

Savoir interpréter en termes de distances, faire un schéma.

Une question de cours pourra être la résolution d'équations/inéquations simples avec des valeurs absolues. **(*)**

- Inégalité triangulaire avec cas d'égalité **(*) L'interrogateur est libre de demander toute la démonstration ou seulement une partie ; mais il faut savoir citer le théorème complet.**

Et généralisation : Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n)\in\mathbb{R}^n$, on a : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

VI – Partie entière et approximations décimales d'un réel

- Définition, notation $\lfloor x\rfloor$, représentation graphique, propriétés.
- $\forall x\in\mathbb{R}, \forall p\in\mathbb{Z}, \lfloor x+p\rfloor=\lfloor x\rfloor+p$ **(*)**
- Approximations décimales à 10^{-n} près d'un réel.

On peut approcher un réel quelconque d'aussi près que l'on veut par des décimaux

• Généralités sur les fonctions réelles

I – Généralités sur les fonctions réelles

- Définition, image d'une fonction.
- Représentation graphique des fonctions associées et application à la recherche de symétries.
- Opérations sur les fonctions : multiplication par un réel, somme, produit et composition.

II – Propriétés globales

- Périodicité, parité
- Fonctions monotones et strictement monotones, fonctions majorées/minorées/bornées.

III – Régularité

- Continuité, théorème des valeurs intermédiaires, prolongement par continuité en un point.

Cette semaine une question de cours pourra être d'étudier la continuité d'une fonction composée. Rédaction parfaite exigée ! **(*)**

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 2 : Généralités sur les fonctions usuelles (fin) + Fonctions usuelles.

Déroulement d'une colle

1. Révisions : Un ou deux calculs extraits/inspirés de la fiche de révisions
2. Ecrire sous forme symbolique une définition du chapitre « Généralités sur les fonctions » et/ou sa négation
   Ou : Définition et caractérisation du plus grand/petit élément d'un ensemble
   Définition et caractérisation de la borne supérieure/inférieure d'un ensemble
3. Une question de cours : méthode ou démonstration signalée par **(*)**
4. Un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous), sur le chapitre « Ordre sur $\mathbb{R}$ et inégalités ».
5. Eventuellement, un exercice plus compliqué s'il reste du temps.

Une question de cours (points 1 à 3) non connue entraine une note < 10.
Si les points 1 à 4 sont réussis, la note sera ≥ 13.

Semaine de colles n°1 du 19/09/22 au 23/09/22– Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 1

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **c.** $\dfrac{x^2-3}{x^2+x-6} \leq 1$

Exercice 3 : Ces inégalités sont à connaitre.
Démontrer les inégalités suivantes :

a. $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ **b.** $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \leq e^x$ **c.** $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

Rq. 2 méthodes vues en TD : utilisation de la convexité et par étude de fonction.

Exercice 4 :

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq \dfrac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} \leq 3$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > \dfrac{1}{1+x}$.

Exercice 5 : *Inégalités entre les moyennes.*
Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose : $m = \dfrac{a+b}{2}$, $g = \sqrt{ab}$ et $h = \dfrac{2ab}{a+b}$. Montrer que : $h \leq g \leq m$.

Exercice 11 :
1. a. Montrer que : $\forall x \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq x^k(1-x)^k \leq x^k$

b. En déduire que : $\forall x \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k \leq \dfrac{1}{1-x}$

Exercice 14 :
Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
1. On considère $A + B = \{ a + b, a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et que l'on a : $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 17 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **f.** $\left|\dfrac{3x-6}{4}\right| \geq 2$ **g.** $|2x-4| \leq |x-1|$

Exercice 21 :
Représenter graphiquement sur $[-2, 2]$, les fonctions suivantes :
$f_1 : x \longmapsto \lfloor 2x \rfloor$ $f_2 : x \longmapsto \lfloor x^2 \rfloor$

Exercice 26 :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

CONSIGNES

EXTRAIT DU PROGRAMME :
« Les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection »

★ **Les colles doivent être préparées** ! Ne pas connaître une question de cours est **inacceptable**… et tout cours manifestement non appris entraînera une note strictement inférieure à 10 !

Une question de cours réussie n'entraine pas nécessairement une note supérieure à 10 !

S'il vous arrive d'avoir une note strictement inférieure à 10, il vous faudra rédiger un « rapport de colle » c'est-à-dire refaire **TOUT votre sujet** de colle sur feuille et me le rendre. Pensez à demander le texte à l'examinateur. Vous pouvez, si besoin est et après une recherche personnelle, me demander des indications pour résoudre votre/vos exercice(s).

Si la colle concernée est en semaine numéro « n », vous devez me rendre votre travail au plus tard le mardi de la semaine de colle « $n + 2$ ».

★ Toute colle prévue dans le colloscope et non effectuée, sera notée « zéro ».

Si vous pouvez attester du **caractère justifié** de votre absence, il pourra vous être proposé une colle de rattrapage (souvent la semaine suivante, avec le même interrogateur et au même horaire).
Pour une absence prévue à l'avance, je vous remercie de me prévenir pour pouvoir en informer l'interrogateur.
Les rattrapages de colles ne sont ***tolérés*** que pour des motifs sérieux !