Semaine de colles n°2 du 26/09/22 au 30/09/22

• Exercices de révisions de terminale

Cf feuille d'exercices (sauf les équations différentielles et les dénombrements)

• Ensembles, logique et raisonnement

I à III - Éléments de logique

- Connecteurs logiques : disjonction ou conjonction de deux assertions, négation d'une assertion
- Implication, implication réciproque et contraposée, équivalence.

IV - Ensembles

- Parties, inclusion, réunion, intersection, complémentaire, différence de deux ensembles, produit cartésien.

V - Les quantificateurs

VI - Divers types de raisonnement

Récurrence simple, démontrer une implication (raisonnement direct ou contraposée), démontrer une équivalence (raisonnement direct ou double implication), raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse/synthèse. Ce dernier type de raisonnement a pour l'instant été très peu utilisé.

• Ordre sur $\mathbb{R}$ et inégalités

I – Les ensembles de nombres

II – Opérations dans $\mathbb{R}$

- Propriétés de l'addition et de la multiplication de réels.

III – Comparaison dans $\mathbb{R}$

- Propriétés de la comparaison dans $\mathbb{R}$, ordre total.
- Règles pour transformer une inégalité.

⚠ • Quand on multiplie (ou divise) une inégalité par une quantité, ON ÉTUDIE D'ABORD SON SIGNE.
• On ajoute des inégalités de même sens mais ON NE LES SOUSTRAIT JAMAIS.
• On multiplie des inégalités de même sens QUE SI ELLES PORTENT SUR DES RÉELS POSITIFS.

- Méthode pour démontrer une inégalité : utilisation du sens de variations d'une fonction, se ramener à une étude de signe, réaliser un tableau de signes, réaliser une étude de fonction, etc…
- Vocabulaire lié à l'ordre : Majorant/minorant, plus grand/petit élément, borne sup. /borne inf.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure
  Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

IV – Intervalles de $\mathbb{R}$

- Définition, classification.

V - Valeur absolue

- Définition, propriétés de calcul, interprétation en termes de distance.
- Lien avec les intervalles : $|x-a|=r \Leftrightarrow \ -r=x-a=r \ \Leftrightarrow \ x=a-r \text{ ou } x=a+r$

$$|x-a|\le r \Leftrightarrow \ -r\le x-a\le r \ \Leftrightarrow \ a-r\le x\le a+r \ \Leftrightarrow x\in[a-r,a+r].$$
$$|x-a|\ge r \Leftrightarrow \ x-a\le -r \text{ ou } x-a\ge r \ \Leftrightarrow \ x\in\,]-\infty,a-r]\cup[a+r,+\infty[$$

Savoir interpréter en termes de distances, faire un schéma.
Une question de cours pourra être la résolution d'équations/inéquations simples avec des valeurs absolues. ***(*)***

- Inégalité triangulaire avec cas d'égalité ***(*)*** et généralisation.

L'interrogateur est libre de demander toute la démonstration ou seulement une partie ; mais il faut savoir citer le théorème complet.

VI – Partie entière et approximations décimales d'un réel

- Définition, notation $\lfloor x \rfloor$, représentation graphique, propriétés.
- $\forall x\in\mathbb{R}, \forall p\in\mathbb{Z}, \lfloor x+p\rfloor=\lfloor x\rfloor+p$ ***(*)***
- Approximations décimales à 10^{-n} près d'un réel.

On peut approcher un réel quelconque d'aussi près que l'on veut par des décimaux

• Généralités sur les fonctions réelles

I – Généralités sur les fonctions réelles

- Définition, image d'une fonction.
- Représentation graphique des fonctions associées et application à la recherche de symétries.
- Opérations sur les fonctions : multiplication par un réel, somme, produit et composition.

II – Propriétés globales

- Périodicité, parité
- Fonctions monotones et strictement monotones, fonctions majorées/minorées/bornées.

III – Régularité

- Continuité, théorème des valeurs intermédiaires, prolongement par continuité en un point.
- Dérivabilité, variations et dérivées, dérivée seconde.

Cette semaine une question de cours pourra être d'étudier la continuité/dérivabilité d'une fonction composée (avec calcul de la dérivée). Rédaction parfaite exigée ! ***(*)***

IV – Propriétés de la courbe représentative

- Tangentes, asymptotes, méthode d'étude des branches infinies.
- Fonctions convexes, fonctions concaves et caractérisations.

V – Bilan : comment étudier une fonction à valeurs réelles

VI – Fonction bijective

- Fonction bijective, bijection réciproque et dérivation de la bijection réciproque.

• Fonctions usuelles : Rappels de Terminale et compléments

I – Fonctions exponentielle, logarithme népérien

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 3 : Fonctions usuelles (fin) + Nombres complexes (début)

Déroulement d'une colle

1. Révisions : Un ou deux calculs extraits/inspirés de la fiche de révisions
2. Écrire sous forme symbolique une définition des chapitres au programme et/ou sa négation
3. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par ***(*)***
4. Un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous),
5. Éventuellement, un exercice plus compliqué s'il reste du temps.

Une question de cours (points 1 à 3) non connue entraine une note < 10.
Si les points 1 à 4 sont réussis, la note sera ≥ 13.

Semaine de colles n°2 du 26/09/22 au 30/09/22– Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 1

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **c.** $\dfrac{x^2-3}{x^2+x-6} \leq 1$

Exercice 3 : Ces inégalités sont à connaitre.
Démontrer les inégalités suivantes :

a. $\forall\, x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$ **b.** $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x+1 \leq e^x$ **c.** $\forall\, x \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

Rq. 2 méthodes vues en TD : utilisation de la convexité et par étude de fonction.

Exercice 4 :

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ 0 \leq \dfrac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} \leq 3$.

2. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > \dfrac{1}{1+x}$.

Exercice 5 : *Inégalités entre les moyennes.*

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose : $m = \dfrac{a+b}{2}$, $g = \sqrt{ab}$ et $h = \dfrac{2ab}{a+b}$. Montrer que : $h \leq g \leq m$.

Exercice 11 :
1. a. Montrer que : $\forall\, x \in [0, 1], \forall\, k \in \mathbb{N},\ 0 \leq x^k(1-x)^k \leq x^k$

b. En déduire que : $\forall\, x \in\,]0, 1[, \forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k \leq \dfrac{1}{1-x}$

Exercice 14 :
Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
1. On considère A + B = { $a+b$, $a \in$ A, $b \in$ B}. Montrer que A + B est majorée et que l'on a : sup(A + B) = sup A + sup B.

Exercice 17 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **f.** $\left|\dfrac{3x-6}{4}\right| \geq 2$ **g.** $|2x-4| \leq |x-1|$

Exercice 18 : *Ce résultat est à connaitre.*
Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leq |x|$.

Exercice 21 :
Représenter graphiquement sur [– 2, 2], les fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \lfloor 2x \rfloor$ $f_2 : x \longmapsto \lfloor x^2 \rfloor$

Exercice 26 :

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

Exercices Chap. 2

Exercice fait dans le cours :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+2}$.

a. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
b. Déterminer alors la bijection réciproque de f.

Exercice 9 :
Proposer un domaine de définition et un domaine d'étude pour les fonctions définies par :

a. $f(t) = \cos^2(t)\sin(2t)$ **b.** $g(t) = \dfrac{1}{\cos(t)+\cos(2t)}$

Exercice 16 :
Déterminer, s'ils existent, $\max_D f$, $\min_D f$, $\sup_D f$ et $\inf_D f$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2$ sur $D =]-2, 1]$ **2.** $f(x) = \lfloor x \rfloor$ sur $D =]-1, 2]$ **3.** $f(x) = xe^{-x^2} - 1$ sur $D = [0, +\infty[$
Ind. Pour le 3., on pourra réaliser une étude de fonction.

Exercice 19 : *Comportement asymptotique.*

Préciser le comportement asymptotique, en $+\infty$ et/ou $-\infty$ de la fonction définie par : **1.** $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

Exercice 21 : *Continuité.*
Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 22 : *Continuité et dérivabilité.*

Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le réel α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 25 : *Tangentes particulières.*
Soit f une fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^3(2-x)}$.
Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis les tangentes à la courbe représentative de f aux bornes de D_f.

Exercice 32 :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = x^2 + \ln x + 1$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un ensemble J à déterminer.
2. Donner le tableau de variations de f^{-1}.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1}. *On ne demande pas d'expliciter f^{-1}.*
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 2.