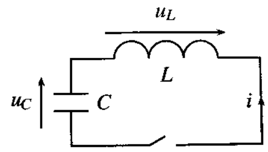
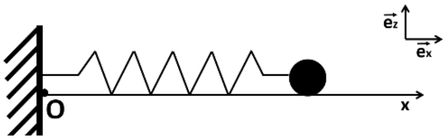
TD05 – OSCILLATEUR HARMONIQUE

Exercice 1 : Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)

1. On considère un circuit comportant une bobine d'inductance propre L en série avec un condensateur de capacité C. Le condensateur est initialement chargé, il présente donc une tension non nulle U_0. A t=0, On ferme l'interrupteur.



   a. Etablir l'équation différentielle vérifiée par u_C. On introduira une pulsation propre ω_0 dont on donnera l'expression et la dimension.
   b. En déduire l'expression de $u_C(t)$ pour $t \geq 0$. Tracer son allure.
   c. Faire un bilan d'énergie. Commenter.
   d. Vérifier que l'expression de $u_C(t)$ trouvée est compatible avec la conservation de l'énergie.
2. Donner l'expression de la force de rappel exercée par un ressort sur un point matériel ne pouvant se déplacer que selon une direction. On fera un schéma, et on donnera la signification et la dimension de tous les termes introduits.
3. Soit une masse m posée sur le sol et reliée à un mur à sa gauche par un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. On considère qu'il n'y a pas de frottements.

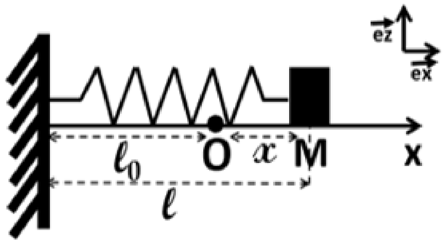


   a. Etablir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par x. On introduira une pulsation propre ω_0 dont on donnera l'expression et la dimension.
   b. On considère qu'à t=0, la masse est éloignée d'une distance x_0 de sa position d'équilibre, et qu'on la lâche en lui donnant une vitesse initiale v_0. En déduire l'expression de $x(t)$. Tracer son allure.
   c. Faire un bilan d'énergie. Commenter.
   d. Vérifier que l'expression de $x(t)$ est compatible avec la conservation de l'énergie mécanique.
4. Cas général : donner l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, puis la forme de la solution associée.
5. Etablir l'expression de la période T et de la fréquence f d'un oscillateur harmonique en fonction de ω_0.
6. Définir l'amplitude, la phase à l'origine et la phase instantanée d'un signal sinusoïdal.

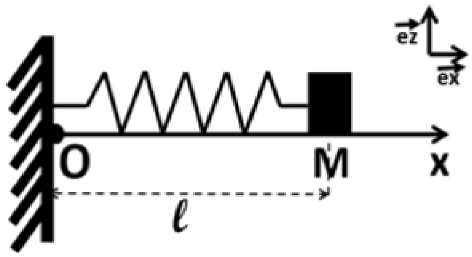
Exercice 2 : expression de la force de rappel

Donner l'expression de la force de rappel du ressort (de raideur k et de longueur à vide l_0) qui s'exerce sur le point M en fonction de x, $\overrightarrow{e_x}$, et éventuellement d'autres paramètres à déterminer.

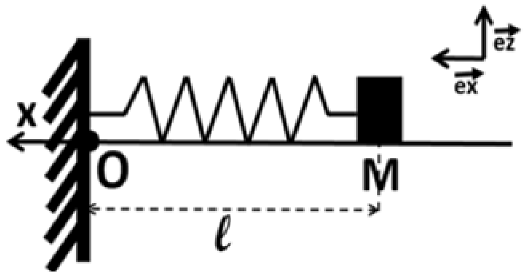
1.



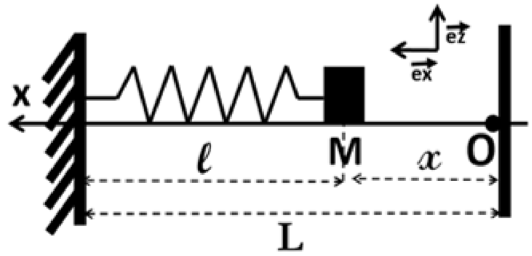
2.

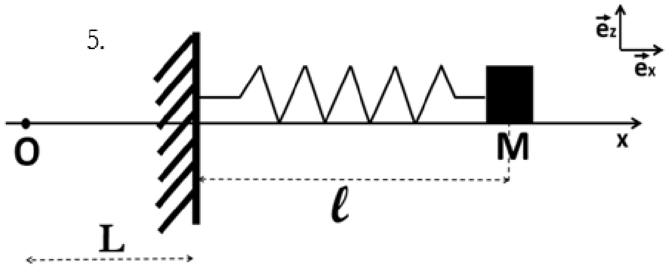


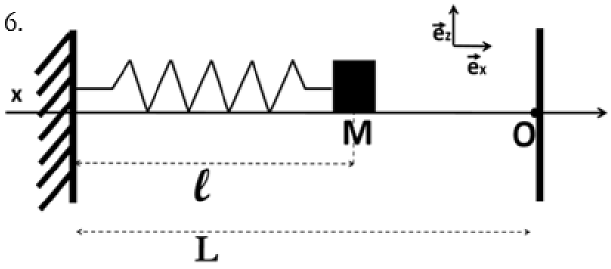
3.



4.



5.


6.


Exercice 3 : Pour mieux comprendre le cours (1)

On considère l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 : $\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$

1. Vérifier que $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ est solution de l'équation du mouvement, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$
2. Vérifier que $x(t) = C\sin(\omega_0 t + \psi)$ est solution de l'équation du mouvement, avec $(C, \psi) \in \mathbb{R}^2$.
3. Vérifier que $x(t) = D\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de l'équation du mouvement, avec $(D, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : Pour mieux comprendre le cours (2)

On considère l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 : $\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$. On choisit comme conditions initiales $x(t=0) = 0$ et $v(t=0) = v_0$.

1. Donner l'expression de x(t) en considérant que x(t) est de la forme $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. $(A,B) \in \mathbb{R}^2$
2. Donner l'expression de x(t) en considérant que x(t) est de la forme $C\sin(\omega_0 t + \psi)$, $(C, \psi) \in \mathbb{R}^2$.
3. Donner l'expression de x(t) en considérant que x(t) est de la forme $D\cos(\omega_0 t + \varphi)$, $(D, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.
4. Conclure.

Exercice 5 : Tension aux bornes d'un oscillateur à quartz

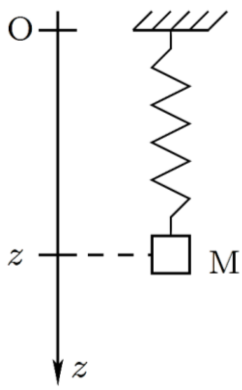
La tension électrique v(t) aux bornes d'un oscillateur à quartz (tel qu'on en trouve dans les montres) vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + A^2 v(t) = 0 \quad \text{Avec } A = 4{,}239\times10^{10} \text{ SI}$$

1. Quelle est la dimension de A ? Donner son unité dans le système international.
2. Exprimer en fonction de A puis calculer la fréquence et la période de cet oscillateur.

Exercice 6 : Oscillations verticales

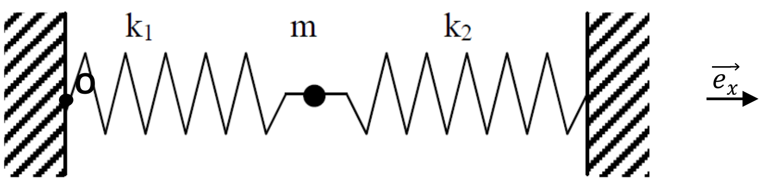
Un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k est fixé en O au plafond (voir figure). À son autre extrémité est attaché un mobile M de masse m, repéré par son abscisse z telle que la position du mobile soit : $\overrightarrow{OM} = z\,\overrightarrow{u_z}$. L'origine du repère est imposée comme sur la figure ci-contre.



1. Effectuer un bilan des forces sur la masse. On considère qu'il n'y a pas de frottements.
2. Établir l'équation du mouvement de la masse.
3. Quelle est l'expression de la position d'équilibre z_{EQ} ?
4. On pose $u(t) = z(t) - z_{EQ}$. Trouver l'équation différentielle satisfaite par u(t).
5. Quelle est la période des oscillations ? Commenter.

Exercice 7 : Ressorts reliés horizontalement

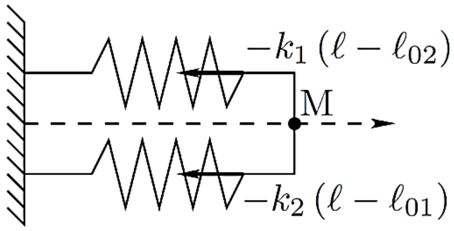
Deux ressorts linéaires sont reliés à une masse m, leur autre extrémité restant fixée à un support vertical (voir schéma). Le premier ressort a une raideur $k_1 = 3{,}0$ N.m^{-1} et une longueur à vide $l_{10} = 10$ cm ; le second a une raideur $k_2 = 10$ N.m^{-1} et une longueur à vide $l_{20} = 20$ cm. Les 2 supports sont distants de L = 1 m. La masse m est susceptible d'osciller horizontalement (on ne tient pas compte du poids), sans frottement.



1. Rechercher la position d'équilibre de la masse. L'origine en O et le sens de $\overrightarrow{e_x}$ sont imposés comme ci-dessus.
2. Déterminer l'équation différentielle qui caractérise le mouvement de la masse.
3. En déduire que ce dispositif est équivalent à un ressort unique dont on déterminera la raideur équivalente.
4. Calculer la période d'oscillation de la masse m (on prendra m = 100 g)

Exercice 8* : Association de ressorts en parallèle

On associe en parallèle (cf figure) deux ressorts élastiques, alignés, de raideurs k_1 et k_2, de longueur à vide ℓ_{01} et ℓ_{02}, formant un système élastique unique de longueur $\ell = \ell_1 = \ell_2$.



1. Déterminer la raideur k_{EQ} et la longueur à vide ℓ_{0EQ} du ressort élastique unique équivalent à cette association.
2. Ce ressort est-il plus souple ou plus raide que chacun des deux ressorts dont il est formé ?

Exercice 9* : Mouvement d'un électron piégé dans un puits de potentiel

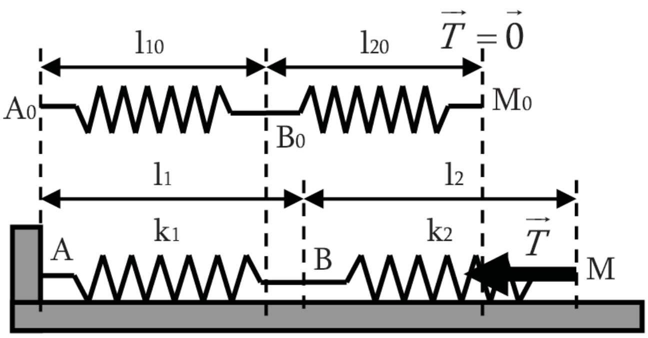
Un électron de masse m_E=9,11x10^{-31}kg et de charge q=-1,60x10^{-19}C est piégé à l'intérieur d'un dispositif tel que son énergie potentielle est :

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{qV_0}{d^2}z^2 \quad \text{où } V_0 = -5{,}0\text{V et } d=6{,}0\text{mm.}$$

On considère que l'électron peut se déplacer uniquement sur l'axe (Oz).

1. Exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction de z(t) et de $\frac{dz}{dt}$.
2. On suppose que l'énergie mécanique est constante dans le temps. Exprimer puis calculer la fréquence des oscillations des électrons dans le piège.

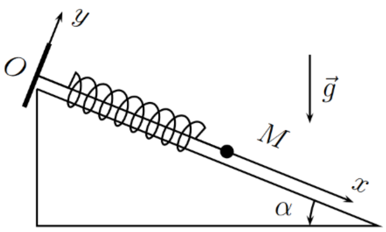
Exercice 10* : Association de ressorts en série



On associe en série (cf figure) deux ressorts élastiques sans masse, alignés, de raideurs k_1 et k_2, de longueur à vide ℓ_{01} et ℓ_{02}, formant un système élastique unique de longueur totale $\ell = \ell_1 + \ell_2$.

1. Montrer que l'ensemble est équivalent à un ressort élastique unique de longueur à vide $\ell_{0EQ} = \ell_{01} + \ell_{02}$ dont on exprimera la constante de raideur k_{EQ} en fonction de k_1 et k_2.
2. Ce ressort est-il plus souple ou plus raide que chacun des deux ressorts dont il est formé ?

Exercice 11* : Oscillateur incliné



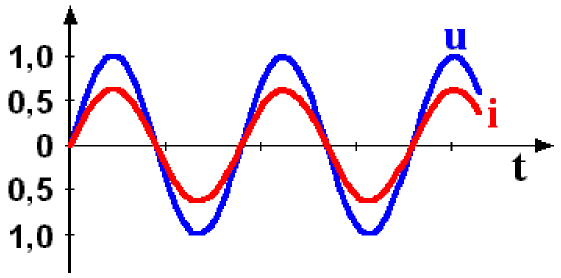
Un ressort linéaire de longueur à vide l_0 et de raideur k est fixé en O (voir figure). À son autre extrémité est attaché un mobile M de masse m, repéré par son abscisse x telle que la position du mobile soit : $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_x}$. Le ressort se trouve sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On considère que le ressort est de masse négligeable devant m. L'origine du repère est imposée en O comme sur la figure ci-contre. On considère qu'il n'y a pas de frottements.

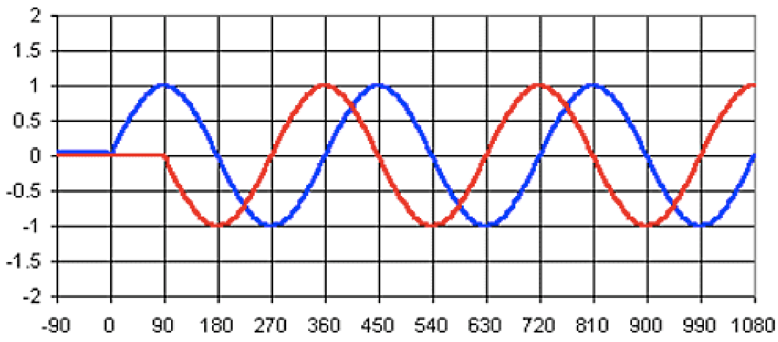
1. Effectuer un bilan des forces sur le mobile M de masse m. On donnera en particulier les composantes de chaque force sur les axes (Ox) et (Oy).
2. Etablir l'expression de la position d'équilibre x_{EQ}. Vérifier son homogénéité et sa cohérence physique.
3. Établir l'équation du mouvement de la masse. La résoudre pour $x(0)=x_0\neq x_{EQ}$ et v(0)=0.
4. Comment aurait été modifiée l'équation différentielle si on avait choisi l'origine du repère en x_{EQ} ? Justifier.
5. Quelle est la période des oscillations ? Commenter (homogénéité, cohérence physique) ?

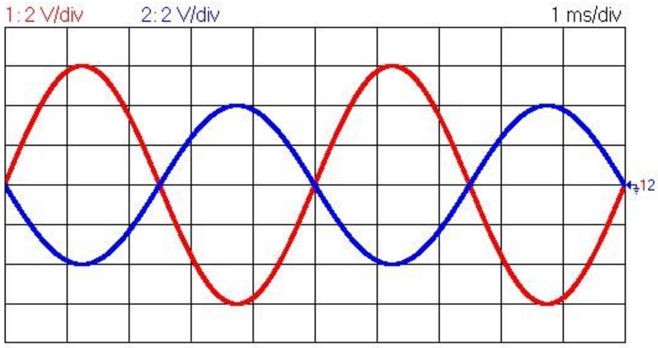
Exercice 12 (important pour les futurs chapitres) : déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

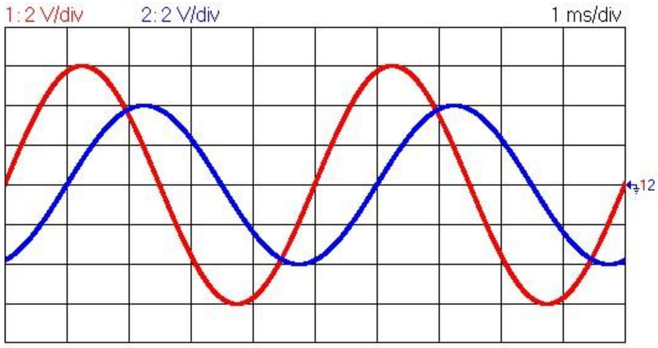
Lire le déphasage entre les deux signaux sur les oscillogrammes suivants :

➔ Quelques cas particuliers :









➔ Cas général :