Semaine de colles n°15 du 30/01/23 au 03/02/23

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Suites numériques : Relations de comparaison

- Relation de domination, suite négligeable devant une autre, suites équivalentes : définitions, caractérisations par le quotient $\frac{u_n}{v_n}$, propriétés, compatibilité avec les opérations.
- Exemples de référence :
  - Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$
  - Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$, $n^\alpha = o(e^{\gamma n})$ ou autre formulation : Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 1$, $n^\alpha = o(x^n)$
  - Si $x > 0$, $x^n = o(n!)$
  - $n! = o(n^n)$
- ⚠ ON NE PEUT PAS AJOUTER DES ÉQUIVALENTS !!!! ON NE PEUT PAS COMPOSER DES ÉQUIVALENTS !!!!
- Lien entre équivalents et la limite d'une suite.
- Obtention d'un équivalent à l'aide d'un encadrement.
- Équivalents de références (à savoir redémontrer **(*)**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers 0. On a :

- $\sin u_n \sim u_n$ et $\tan u_n \sim u_n$
- $\cos u_n \sim 1$ et $1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$
- $\operatorname{sh} u_n \sim u_n$ et $\operatorname{ch} u_n \sim 1$
- $e^{u_n} \sim 1$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\ln(u_n + 1) \sim u_n$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé** : $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, u_n$
- $\arccos(u_n) \sim \frac{\pi}{2}$
- $\arcsin(u_n) \sim u_n$ et $\arctan(u_n) \sim u_n$

• Limites et continuité

I - Limite d'une fonction et continuité

- Notion de voisinage
- Définition limite (finie ou infinie) en un point (fini ou infini)
- Unicité de la limite.
- Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
- Continuité en un point.
- Image d'une suite par une fonction, caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité en un point.
  Application : comment montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.

NOUVEAU COURS :

• Limites et continuité

I - Limite d'une fonction et continuité

- Limite ou continuité à droite ou à gauche.

II - Règles de calculs

- Produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a.
- Opérations sur les limites : opérations algébriques et composition.
- Limite et ordre : signe et théorème d'encadrement dit des gendarmes.
- Théorème de la limite monotone.

III - Continuité sur un intervalle

- Définition, opérations sur les fonctions continues.
- Restriction et prolongement de fonctions continues, prolongement par continuité en un point.
- Image d'un intervalle par une fonction continue, théorème des valeurs intermédiaires, cas d'une fonction continue sur un **segment** de $\mathbb{R}$ (th des bornes atteintes).
- Bijection réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

IV - Extension aux fonctions à valeurs complexes

- Limite en un point, continuité, traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

• Dérivation des fonctions à valeurs réelles

I - Fonctions dérivables

- Dérivabilité en un point : nombre dérivé, interprétation graphique, dérivabilité à droite/gauche
- f est dérivable en $a \in I \Leftrightarrow$ Il existe $\beta \in \mathbb{R}$ et ε définie sur I tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)\,\beta + (x-a)\,\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \quad (\text{et alors } \beta = f'(a)) \ (*).$$

- Dérivabilité globale, fonction dérivée, « dérivable $\Rightarrow$ continue ».

II - Opérations sur les dérivées

- Opérations algébriques, composition, dérivation d'une bijection réciproque.

III - Dérivations successives

- Définition, opérations sur les fonctions n fois dérivable, classe d'une fonction.

Ex. Dérivée n-ième de $x \longmapsto x^\alpha$, $x \longmapsto x^n$, $x \longmapsto e^\alpha$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \frac{1}{x-a}$, $x \longmapsto \ln|x-a|$ ***(*) Résultats à connaitre et à savoir démontrer (Savoir faire les récurrences même non faites en cours)***

- Formule de Leibniz, ex. calcul de la dérivée n-ième de $x \longmapsto (x^2 + 3x + 1)e^{2x}$

IV - Propriétés des fonctions dérivables

- Extremum local en un point intérieur à I.
- Théorème de Rolle **(*)**, Th. des accroissements finis **(*)**, Inégalités des accroissements finis.
- Obtention de la dérivabilité par limite de la dérivée.
- Sens de variations pour une fonction dérivable sur un intervalle et cas de la stricte monotonie.

V - Fonctions convexes

- Paramétrage d'un segment, définition d'une fonction convexe/concave
- Position de la courbe représentatives par rapports à ses cordes
- Cas des fonctions dérivables, position de la courbe représentative par rapport à ses tangentes
- Cas des fonctions deux fois dérivable
- Inégalités classiques de convexité :

$$\forall u \in]-1, +\infty[, \ln(1+u) \le u \qquad \forall x \in \mathbb{R}, e^x \ge 1 + x. \qquad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x.$$

VI - Extension aux fonctions à valeurs complexes

⚠ Les th. de Rolle et des accroissements finis ne s'étendent pas aux fonctions à valeurs complexes.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 16 : Dérivabilité (fin des exercices) + Suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Déroulement d'une colle

1. Définition de $f(x) \to L$ quand $x \to a$ (Un cas parmi les 9 possibles).
2. Citer un théorème des chapitres continuité / dérivabilité : TVI, Th de Rolle, TAF, IAF , ….
3. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
4. Exercice(s)

⚠ Nous n'avons pas encore fait d'exercices sur les IV, V et VI d chapitre « Dérivabilité »

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°15 du 30/01/23 au 03/02/23 – Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 12

Exercice : ex 8 chap. 11 + 3 chap. 12

0. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?

1. Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

2. En déduire que : $\forall\, n \geq 2$ $u_n - 1 \leq \ln(n) \leq u_n - \frac{1}{n}$.

3. En déduire que u_n est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

4. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = u_n - \ln n$. Montrer que (x_n) est convergente. On note γ cette limite, c'est la *constante d'Euler*.

Exercice 5 :

Déterminer, si elles existent, les limites des suites dont on donne le terme général ci-dessous :

1. $u_n = n\ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)$ **2.** $u_n = \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ **3.** $u_n = n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ **4.** $u_n = \sqrt{n^2+36n+12} - n$

5. $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ **6.** $u_n = n\left(\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{2n}\right)$ **7.** $u_n = \left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ **8.** $u_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}$

Exercices Chap. 13

Exercice 4 :

Étudier la limite en 0 des fonctions $f : x \longmapsto \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ et de $g : x \longmapsto \frac{a}{x}\left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

Exercice 5 :

Déterminer, si elles existent, les limites de f en a.

a. $f : x \longmapsto e^{-x}\cos x$ en $a = +\infty$, puis $a = -\infty$. **b.** $f : x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ en $a = 0$

c. $f : x \longmapsto \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$ en $a = 1$ **d.** $f : x \longmapsto \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$ en $a = -1$

Exercice 6 :

Est-ce que les fonctions suivantes sont continues en 0 ? Prolongeables par continuité en 0 ?

1. $f_1 : x \longmapsto \frac{\tan 3x}{x}$ **2.** $f_2 : x \longmapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ **3.** $f_3 : x \longmapsto \exp\frac{1}{x}$

4. $f_4 : x \longmapsto \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{si } x \in\ ]-1,+\infty[\ \setminus\ \{0\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ **5.** $f_5 : x \longmapsto \cos\frac{1}{x}$ **6.** $f_6 : x \longmapsto \sin x \cos\frac{1}{x}$

Exercice 9 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1, telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 12 :

1. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 22 :

Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continue.

1. Démontrer que f admet un point fixe c'est-à-dire : $\exists\ c \in [a, b], f(c) = c$.

2. Prouver que ce point fixe est unique dans les deux cas suivants :

a. f est décroissante sur $[a, b]$.

b. f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$ avec $0 < k < 1$.

Exercice 26 :

Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell < 1$ en $+\infty$.

Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 29 : *Équation fonctionnelle.*

Démontrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$, est égal à l'ensemble des homothéties de $\mathbb{R}$

Exercices Chap. 14

Exercice 2 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\frac{x f(a) - a f(x)}{x-a}$ quand x tend vers a.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ quand h tend vers 0.

Exercice 10 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, si elle existe, la dérivée $n^{\text{ième}}$ des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto (x^2+1)e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ **2.** $f : x \longmapsto \sin x\, e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

4. $f : x \longmapsto \frac{1}{3x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1/3\}$ **5.** $f : x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f : x \longmapsto x^n(1+x)^n$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. En utilisant la formule de Leibniz, déterminer, après avoir justifié son existence, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.

2. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer, une autre expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.

3. En déduire la valeur de : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 12 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f_n : x \longmapsto x^{n-1}\ln x$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $\forall\, x > 0$, $f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$.