

Semaine de colles n°2 du 25/09/23 au 29/09/23

• **Exercices de révisions de terminale**

Cf feuille d'exercices (sauf les équations différentielles et les dénombrements)

• **Ensembles, logique et raisonnement**

I à III - Éléments de logique

- ➔ Connecteurs logiques : disjonction ou conjonction de deux assertions, négation d'une assertion
- ➔ Implication, implication réciproque et contraposée, équivalence.

IV - Ensembles

- ➔ Parties, inclusion, réunion, intersection, complémentaire, différence de deux ensembles, produit cartésien.

V - Les quantificateurs

VI - Divers types de raisonnement

Récurrance simple, démontrer une implication (raisonnement direct ou contraposée), démontrer une équivalence (raisonnement direct ou double implication), raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse/synthèse. Ce dernier type de raisonnement a pour l'instant été très peu utilisé.

• **Ordre sur \mathbb{R} et inégalités**

I - Les ensembles de nombres

II - Opérations dans \mathbb{R}

- ➔ Propriétés de l'addition et de la multiplication de réels.

III - Comparaison dans \mathbb{R}

- ➔ Propriétés de la comparaison dans \mathbb{R} , ordre total.
- ➔ Règles pour transformer une inégalité.
- ⚠ • Quand on multiplie (ou divise) une inégalité par une quantité, ON ÉTUDIE D'ABORD SON SIGNE.
 - On ajoute des inégalités de même sens mais ON NE LES SOUSTRAIT JAMAIS.
 - On multiplie des inégalités de même sens QUE SI ELLES PORTENT SUR DES RÉELS POSITIFS.
- ➔ Méthode pour démontrer une inégalité : utilisation du sens de variations d'une fonction, se ramener à une étude de signe, réaliser un tableau de signes, réaliser une étude de fonction, etc...
- ➔ Vocabulaire lié à l'ordre : Majorant/minorant, plus grand/petit élément, borne sup. /borne inf.
- ➔ Toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure
Toute partie non vide et minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

IV - Intervalles de \mathbb{R}

- ➔ Définition, classification.

V - Valeur absolue

➔ Définition, propriétés de calcul, interprétation en termes de distance.

- ➔ Lien avec les intervalles : $|x - a| = r \Leftrightarrow -r = x - a = r \Leftrightarrow x = a - r \text{ ou } x = a + r$
- $|x - a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x - a \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a - r, a + r]$.
- $|x - a| \geq r \Leftrightarrow x - a \leq -r \text{ ou } x - a \geq r \Leftrightarrow x \in]-\infty, a - r] \cup [a + r, +\infty[$

Savoir interpréter en termes de distances, faire un schéma.

Une question de cours pourra être la résolution d'équations/inéquations simples avec des valeurs absolues. (*)

- ➔ Inégalité triangulaire avec cas d'égalité (*) L'interrogateur est libre de demander toute la démonstration ou seulement une partie ; mais il faut savoir citer le théorème complet.

Et généralisation : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$.

VI - Partie entière et approximations décimales d'un réel

- ➔ Définition, notation $\lfloor x \rfloor$, représentation graphique, propriétés.
- ➔ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$ (*)
- ➔ Approximations décimales à 10^{-n} près d'un réel.
On peut approcher un réel quelconque d'aussi près que l'on veut par des décimaux

NOUVEAU COURS :

• **Généralités sur les fonctions réelles**

I - Généralités sur les fonctions réelles

- ➔ Définition, image d'une fonction.
- ➔ Représentation graphique des fonctions associées et application à la recherche de symétries.
- ➔ Opérations sur les fonctions : multiplication par un réel, somme, produit et composition.

II - Propriétés globales

- ➔ Périodicité, parité
- ➔ Fonctions monotones et strictement monotones, fonctions majorées/minorées/bornées.

III - Régularité

- ➔ Continuité, théorème des valeurs intermédiaires, prolongement par continuité en un point.
- ➔ Dérivabilité, variations et dérivées, dérivée seconde.

Cette semaine une question de cours pourra être d'étudier la continuité/dérivabilité d'une fonction composée (avec calcul de la dérivée). Rédaction parfaite exigée ! (*)

IV - Propriétés de la courbe représentative

- ➔ Tangentes, asymptotes, méthode d'étude des branches infinies.
- ➔ Fonctions convexes, fonctions concaves et caractérisations.

V - Bilan : comment étudier une fonction à valeurs réelles

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 3 : Généralités sur les fonctions usuelles (fin) + Fonctions usuelles.

Déroutement d'une colle

1. Révisions : Un ou deux calculs inspirés de la fiche de révisions
2. Écrire sous forme symbolique une définition des chapitres au programme et/ou sa négation
3. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par (*)
4. Un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous),
5. Éventuellement, un exercice plus compliqué s'il reste du temps.

Une question de cours (points 1 à 3) non connue entraine une note < 10.

Si les points 1 à 4 sont réussis, la note sera ≥ 13 .

Exercices Chap. 1Exercice 2 :

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes : **b.** $0 < \frac{2-x}{1-x} < 1$

Exercice 3 :

Démontrer les inégalités suivantes :

$$\mathbf{a.} \forall x > -1, \ln(1+x) \leq x \qquad \mathbf{b.} \forall x \in \mathbb{R}, x+1 \leq e^x \qquad \mathbf{c.} \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Rq. 2 méthodes vues en TD : utilisation de la convexité et par étude de fonction.

Rq. Ces inégalités sont à connaître.

Exercice 4 :

$$2. \text{ Montrer que : } \forall x \in \mathbb{R}^+, \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}.$$

Exercice 5 : Inégalités entre les moyennes.

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose : $m = \frac{a+b}{2}$, $g = \sqrt{ab}$ et $h = \frac{2ab}{a+b}$. Montrer que : $h \leq g \leq m$.

Exercice 11 :

1. a. Montrer que : $\forall x \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq x^k(1-x)^k \leq x^k$

$$\mathbf{b.} \text{ En déduire que : } \forall x \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{k=0}^n x^k(1-x)^k \leq \frac{1}{1-x}$$

Exercice 14 :

Soit A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} .

1. On considère $A+B = \{a+b, a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A+B$ est majorée et que l'on a : $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 17 :

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes : **f.** $\left|\frac{3x-6}{4}\right| \geq 2$ **g.** $|2x-4| \leq |x-1|$

Exercice 21 :

Représenter graphiquement sur $[-2, 2]$, les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \lfloor 2x \rfloor \qquad f_2 : x \mapsto \lfloor x^2 \rfloor$$

Exercice 22 :

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor = 4n+1$.

Exercice 26 :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

Exercices Chap. 2Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs :

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1. f est paire. | 2. f est majorée. |
| 3. f admet un maximum. | 4. f est bornée. |
| 5. f n'est pas paire. | 6. f n'est pas majorée. |
| 7. f n'est pas bornée. | |

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- Déterminer son ensemble de définition et étudier sa parité.
- Sans calcul de dérivée, donner les variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice 9 :

Proposer un domaine de définition et un domaine d'étude pour les fonctions définies par : **b.** $g(t) = \frac{1}{\cos(t) + \cos(2t)}$

Exercice 11 :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Ind. On pourra étudier la périodicité de $f : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 21 : Continuité.

Étudier la continuité sur \mathbb{R} de la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.