Semaine de colles n°4 du 09/10/23 au 13/10/23

• Généralités sur les fonctions réelles

I – Généralités sur les fonctions réelles

II – Propriétés globales

III – Régularité

IV – Propriétés de la courbe représentative

V – Bilan : comment étudier une fonction à valeurs réelles

VI – Fonction bijective

- Fonction bijective, bijection réciproque et dérivation de la bijection réciproque.

• Fonctions usuelles : Rappels de Terminale et compléments

I – Fonctions exponentielle, logarithme népérien

- Inégalités à connaitre : $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \leq e^x$ et $\forall x > 0, \ln x \leq x-1$

II – Fonctions puissances

- Définition de a^b avec a et b réels tel que a > 0, propriétés de calcul.
- Étude complète des fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ variations et prolongements suivant les valeurs de α
- Fonctions racine n-ième.
- Méthode d'étude de fonctions de la forme $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$.
- Croissances comparées.

III – Fonctions circulaires

- Rappels : fonctions cosinus et sinus
- Inégalités à connaitre : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$ *(*)*
- Les fonctions cosinus et sinus sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, expression des dérivées n-ième. *(*)*
- Fonction tangente : Étude complète avec ensemble de définition, dérivée, variations, limites, courbe représentative.

Une question de cours pourra être de réaliser l'étude de la fonction tangente. *(*)*

- Formules d'addition, de linéarisation et de duplication.

Nouveau cours :

• Les nombres complexes

I - Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

- Définition, unicité de la forme algébrique d'un complexe, parties réelles et imaginaires.
- Addition et multiplication : propriétés.
- Conjugaison, propriétés de calcul, expressions de Re(z) et Im(z), caractérisation des éléments de $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$.
- Module, propriétés de calcul.
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité. *(*)*

II - Forme trigonométrique

- Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
- Notation $e^{i\theta}$, propriétés de calcul, formules de De Moivre et d'Euler.
- Argument d'un complexe de module 1, d'un complexe non nul, propriétés de calcul.
- Caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide des arguments.

Rq. pour les interrogateurs : Nous n'avons pas encore vu la factorisation par l'angle moitié.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 5 : Nombres complexes (fin)

Déroulement d'une colle

1. Étude de la dérivabilité d'une fonction (composée, puissance.) avec calcul de la dérivée, sur un exemple. Rédaction parfaite exigée !
2. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par *(*)*.
3. Exercice(s) : On commencera par in exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°4 du 09/10/23 au 13/10/23 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 2

Exercice fait dans le cours :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+2}$.

a. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
b. Déterminer alors la bijection réciproque de f.

Exercice 18 : *Comportement asymptotique.*
Préciser le comportement asymptotique, en $+\infty$ et/ou $-\infty$, des fonctions dont on donne l'expression ci-dessous :
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

Exercice 21 : *Continuité et dérivabilité.*
Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\begin{cases}\alpha & \text{si } x=0\\ e^{-1/x} & \text{si } x>0\end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le réel α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 24 : *Tangentes particulières.*
Soit f une fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^3(2-x)}$.
Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis les tangentes à la courbe représentative de f aux bornes de D_f.

Exercice 31 :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x)=x^2+\ln x+1$.
1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un ensemble J à déterminer.
2. Donner le tableau de variations de f^{-1}.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1}. *On ne demande pas d'expliciter f^{-1}.*
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 2.

Exercices Chap. 3

Exercice 1 :
5. Montrer que : $\forall x \in\ ]0,1[,\ x^x(1-x)^{1-x}\geq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a. $\ln|x-1|+\ln|x-3|=\ln|3x^2-4x+1|$
c. $2^{x+4}+3^x=2^{x+2}+3^{x+2}$
e. $3^x+4^x=5^x$
f. $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^{\,x}$

Exercice 6 : **1.** Étudier la fonction : $f : x \longmapsto x+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

Exercice 8 : **1.** Étudier la fonction : $f : \quad x \longmapsto x^x$

Exercice 10 : *Équations et inéquations trigonométriques.*
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

2. $\tan x \tan 2x = 1$
6. $\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$
7. $\tan x \geq 1$

Exercice 14 :
Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ et vérifiant : $\forall\ x\in \mathbb{R}^*,\ f(x)+3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2$.

Exercices Chap. 4

Exercice 7 :
Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants. On précisera leur module et leurs arguments.
1. $z_1=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^7}{(1+i)^5}$
4. $z_4=-2ie^{i\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$
5. $z_5=(1-i)^n+(1+i)^n$, $n\in\mathbb{N}$

Exercice 9 :
Soit z un complexe appartenant à $\mathbb{U}\setminus\{1\}$. Prouver que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

Exercice 10 :
2. Soit u appartenant à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et $z\in\mathbb{C}$. Prouver que : $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow u\in\mathbb{U}$ ou $z\in\mathbb{R}$.

Exercice 15 : Soit u et v deux complexes.
Montrer que : **1.** $|u|+|v|\leq|u+v|+|u-v|$
2. *Identité du parallélogramme.* $|u+v|^2+|u-v|^2=2(|u|^2+|v|^2)$

Exercice 25 : *Équations avec des modules.*
1. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z+1|=|z|+1$.
2. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z|=|1-z|=\dfrac{1}{|z|}$.