Semaine de colles n°5 du 16/10/23 au 20/10/23

Du programme précédent :

- **Les nombres complexes**

I - Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

- Définition, unicité de la forme algébrique d'un complexe, parties réelles et imaginaires.
- Addition et multiplication : propriétés.
- Conjugaison, propriétés de calcul, expressions de Re(z) et Im(z), caractérisation des éléments de $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$.
- Module, propriétés de calcul.
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité. ***(*)***

II - Forme trigonométrique

- Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
- Notation $e^{i\theta}$, propriétés de calcul, formules de De Moivre et d'Euler.
- Argument d'un complexe de module 1, d'un complexe non nul, propriétés de calcul.
- Caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide des arguments.

Nouveau cours :

II - Forme trigonométrique (suite)

- Une méthode à connaitre : factorisation par l'angle moitié.

Ex. Module et arguments de $1 + e^{it}$ ou $1 - e^{it}$, à discuter suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ ***(*)***

- Exponentielle complexe et propriétés.

Résolution d'équations de la forme $e^z = a$.

III - Applications à la trigonométrie

- Formules de trigonométrie usuelles : linéarisation, factorisation.
- Transformation de a cos x + b sin x et résolution d'équations de la forme : a cos x + b sin x = c.
- Calcul des sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. ***(*)***

IV – Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Rappel / complément : Si z_0 est solution d'une équation polynomiale alors elle se factorise par $(z - z_0)$.

- Racines carrées d'un complexe : Définition, méthode de calcul, tout complexe non nul admet 2 racines carrées opposées.
- Application à la résolution d'une équation de degré 2.
- Racine n-ième de l'unité, somme et produit.

Rq. Une question de cours pourra être de donner la définition et la justification des expressions des racines n-ième de l'unité. ***(*)***

- Racines cubiques de l'unité : 1, j et $\bar{j} = j^2$.

  Relations : $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et j et j^2 sont les solutions de $z^2 + z + 1 = 0$.
- Résolution de $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$.

V – Nombres complexes et géométrie plane

- Interprétation graphique des complexes, module, argument.
- Affixe d'un point, d'un vecteur, lieux de points usuels (cercles, disques, médiatrices)
- Caractérisation de points alignés, caractérisation de droites perpendiculaires.
- Transformations du plan (définitions + expressions complexes) : symétrie orthogonale d'axe (Ox)
  Translations
  Rotation de centre Ω et de rayon r
  Homothétie de centre Ω et de rapport k > 0.

VI – Compléments sur les fonctions à valeurs complexes

- La dérivée d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est définie par dérivation de ses parties réelle et imaginaire.
- Dérivation de $x \longmapsto e^{\alpha x}$ avec $a \in \mathbb{C}$ et de $t \longmapsto e^{\varphi(t)}$ avec $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

Rq pour les interrogateurs : Nous n'avons pas encore fait d'exercices sur la partie géométrie avec les complexes, mais le cours est à connaitre.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n°6 : Calcul de sommes et de produits

Déroulement d'une colle

1. Une formule de trigonométrie A CONNAITRE SANS HESITATION ! cf. formulaire
2. Un calcul parmi :
   - Justification d'une formule de trigonométrie
   - Équation de la forme $e^z = a$ ou a cos x + b sin x = c ou de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ ou $z^n = a$.

   Vous devez être efficaces dans vos calculs.
3. Une question de cours parmi celles signalées par (* .
4. Exercice(s) : On pourra commencer par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°5 du 16/10/23 au 20/10/23 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 4

Exercice 7 :
Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants. On précisera leur module et leurs arguments.

5. $z_5 = (1-i)^n + (1+i)^n$, $n \in \mathbb{N}$ **7.** $z_7 = e^{ix} + e^{-iy}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ **8.** $z_8 = \dfrac{e^{ix}-1}{e^{ix}+1}$, $x \in]-\pi, \pi[$

Exercice 8 :

Déterminer pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est un réel positif.

Exercice 9 :

Soit z un complexe appartenant à $\mathbb{U} \setminus \{1\}$. Prouver que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

Exercice 10 :

2. Soit u appartenant à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Prouver que : $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u \in \mathbb{U}$ ou $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 : Soit u et v deux complexes.
Montrer que : **1.** $|u| + |v| \leq |u + v| + |u - v|$
2. *Identité du parallélogramme.* $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$

Exercice 25 : *Équations avec des modules.*
1. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z + 1| = |z| + 1$.
2. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z| = |1 - z| = \dfrac{1}{|z|}$.

Exercice 26 : *Équations avec des arguments.*
1. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $2 \arg(z + i) \equiv \arg(z) + \arg(i) \ [\pi]$.

Exercice 27 :
2. Trouver tous les complexes z tels que : $z^3 = -16\ \overline{z}^{\,7}$.

Exercice 31 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.
a. $(z + 1)^n = (z - 1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
Nous avons montré que $n - 1$ solutions trouvées sont imaginaires pures et 2 à 2 distinctes.

Exercice 33 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a. $z^2 + (1 - 2i)z + 3(1 - i) = 0$
d. $iz^3 + (2i - 1)z^2 - (i + 4)z + 3(2i - 1) = 0$ <u>*Ind.*</u> *vérifier l'existence d'une solution réelle.*