Semaine de colles n°6 du 6/11/23 au 10/11/23

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Les nombres complexes

I - Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

II - Forme trigonométrique

- Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
- Notation $e^{i\theta}$, propriétés de calcul, formules de De Moivre et d'Euler.
- Argument d'un complexe de module 1, d'un complexe non nul, propriétés de calcul.
- Caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide des arguments.
- Une méthode à connaitre : factorisation par l'angle moitié.

Ex. Module et arguments de $1 + e^{it}$ ou $1 - e^{it}$, à discuter suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}$

- Exponentielle complexe et propriétés.

Résolution d'équations de la forme $e^z = a$.

III - Applications à la trigonométrie

- Formules de trigonométrie usuelles : linéarisation, factorisation.
- Transformation de $a \cos x + b \sin x$ et résolution d'équations de la forme : $a \cos x + b \sin x = c$.
- Calcul des sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. **(*)**

IV – Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Rappel / complément : Si z_0 est solution d'une équation polynomiale alors elle se factorise par $(z - z_0)$.

- Racines carrées d'un complexe : Définition, méthode de calcul, tout complexe non nul admet 2 racines carrées opposées.
- Application à la résolution d'une équation de degré 2.
- Racine n-ième de l'unité, somme et produit.

Rq. Une question de cours pourra être de donner la définition et la justification des expressions des racines n-ième de l'unité. **(*)**

- Racines cubiques de l'unité : 1, j et $\bar{j} = j^2$.

  Relations : $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et j et j^2 sont les solutions de $z^2 + z + 1 = 0$.
- Résolution de $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$.

V – Nombres complexes et géométrie plane

- Interprétation graphique des complexes, module, argument.
- Affixe d'un point, d'un vecteur, lieux de points usuels (cercles, disques, médiatrices)
- Caractérisation de points alignés, caractérisation de droites perpendiculaires.
- Transformations du plan (définitions + expressions complexes) : symétrie orthogonale d'axe (Ox)
  Translations
  Rotation de centre Ω et de rayon r
  Homothétie de centre Ω et de rapport $k > 0$.

VI – Compléments sur les fonctions à valeurs complexes

- La dérivée d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est définie par dérivation de ses parties réelle et imaginaire.
- Dérivation de $x \longmapsto e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et de $t \longmapsto e^{\varphi(t)}$ avec $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

NOUVEAU COURS :

• Calcul de sommes et de produits

I – Le symbole Σ

- Notation Σ pour les sommes
- Règles de calcul : termes constants, facteur constant, changement d'indice, symétrie, sommes télescopiques.
- Séparation des termes pairs et impairs
- Sommes classiques : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ **(*)** et $\sum_{k=1}^{n} k^3$.
- Sommes de type géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On a : $\sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} q^p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ **(*)**
- Formule de Bernoulli : $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$
- Cas des sommes doubles, Sommes triangulaires : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x_{i,j} = \sum_{1 \le j \le i \le n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} x_{i,j}$

II – Le symbole Π

- Notation Π pour les produits
- Règles de calcul, produits télescopiques.

III – Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie

- Définition de n !, de $\binom{n}{k}$, valeurs particulières, symétrie et Si $1 \le k \le n$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- Formule du triangle de Pascal et formule du binôme de Newton.
- Application à la trigonométrie : **(*)** *– Un exercice utilisant une des deux méthodes ci-dessous.*

Pour transformer des produits de $\cos^p x$ et $\sin^q x$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, en somme de $\cos(kx)$ et $\sin(lx)$ où $(k, l) \in \mathbb{N}^2$:

Utiliser les formules d'Euler puis appliquer la formule du binôme de Newton.

Pour exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, avec n entier, en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

On a : $\cos(nx) = \mathrm{Re}(e^{inx}) = \mathrm{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$ et $\sin(nx) = \mathrm{Im}(e^{inx}) = ..$ d'après la formule de De Moivre

Ensuite, on utilise la formule du binôme de Newton.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n°7 : Calcul de primitives et d'intégrales.

Déroulement d'une colle

1. Une formule de trigonométrie A CONNAITRE SANS HESITATION ! cf. formulaire
2. Résolution d'une équation dans $\mathbb{C}$: $e^z = a$ ou degré 2 ou $z^n = a$.
3. Une question de cours parmi celles signalées par (*).
4. Exercice(s) : On pourra commencer par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°6 du 6/11/23 au 10/11/23 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 4

Exercice 7 :
Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants. On précisera leur module et leurs arguments.

5. $z_5=(1-i)^n+(1+i)^n$, $n\in\mathbb{N}$ **7.** $z_7=e^{ix}+e^{-iy}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ **8.** $z_8=\dfrac{e^{ix}-1}{e^{ix}+1}$, $x\in\,]-\pi,\pi[$

Exercice 8 :

Déterminer pour quelles valeurs de $n\in\mathbb{N}$, le complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est un réel positif.

Exercice 9 :

Soit z un complexe appartenant à $\mathbb{U}\setminus\{1\}$. Prouver que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

Exercice 10 :

2. Soit u appartenant à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et $z\in\mathbb{C}$. Prouver que : $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow u\in\mathbb{U}$ ou $z\in\mathbb{R}$.

Exercice 15 : Soit u et v deux complexes.
Montrer que : **1.** $|u|+|v|\le|u+v|+|u-v|$
2. *Identité du parallélogramme.* $|u+v|^2+|u-v|^2=2(|u|^2+|v|^2)$

Exercice 16 :
Soit $\omega=e^{\frac{2i\pi}{7}}\in\mathbb{C}$. On pose : $A=\omega+\omega^2+\omega^4$ et $B=\omega^3+\omega^5+\omega^6$.
Calculer A + B et A × B. En déduire les valeurs de A et B sous forme algébrique.

Exercice 25 : *Équations avec des modules.*
1. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z+1|=|z|+1$.
2. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z|=|1-z|=\dfrac{1}{|z|}$.

Exercice 26 : *Équations avec des arguments.*
1. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $2\arg(z+i)\equiv\arg(z)+\arg(i)\ [\pi]$.

Exercice 27 :
2. Trouver tous les complexes z tels que : $z^3=-16\,\bar{z}^7$.

Exercice 31 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.
a. $(z+1)^n=(z-1)^n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$
Nous avons montré que $n-1$ solutions trouvées sont imaginaires pures et 2 à 2 distinctes.

Exercice 33 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a. $z^2+(1-2i)z+3(1-i)=0$ **d.** $iz^3+(2i-1)z^2-(i+4)z+3(2i-1)=0$ *Ind. vérifier l'existence d'une solution réelle.*

Exercice 37 : *A savoir retrouver très rapidement !*
Soit A, B et M trois points du plan complexe, distincts deux à deux, d'affixes respectives a, b et z. On pose : $Z=\dfrac{z-a}{z-b}$.

Montrer que l'on a : **1.** A, B, M alignés $\Leftrightarrow Z\in\mathbb{R}^*$ **4.** ABM rectangle isocèle en M $\Leftrightarrow Z=i$ ou $Z=-i$

2. ABM rectangle en M $\Leftrightarrow Z\in i\mathbb{R}^*$ **5.** ABM équilatéral $\Leftrightarrow Z=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3. ABM isocèle en M $\Leftrightarrow |Z|=1$

Exercice 40 :
a. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : M, P point d'affixe iz et I point d'affixe i sont alignés.
b. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $\left[z-(1+i)\right]\left[\bar{z}-(1-i)\right]=8$

Exercices Chap. 5

Exercice 4 : Calculer les sommes suivantes (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

1. $S_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)$ **2.** $S_2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ **3.** $S_3=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

5. $S_5=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$ **7.** $S_7=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2$

Exercice 5 : *Sommes doubles.*
Calculer les sommes suivantes (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

1. $S_1=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{i}{k+1}$ **2.** $S_2=\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}ij$ **3.** $S_3=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)$ **4.** $S_4=\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n}(i+j)$

Exercice 6 :

Pour $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka^k$

1. Calculer S_n lorsque $a=1$.
2. Lorsque $a\neq1$, calculer $a\,S_n-S_n$ et en déduire la valeur de S_n.
3. Lorsque $a\neq1$, retrouver le résultat précédent en remarquant que $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}a^k$.

Exercice 14 :
Calculer les sommes suivantes (n appartient à $\mathbb{N}$) :

1. $S_1'=\displaystyle\sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}$ et $S_1''=\displaystyle\sum_{0\le 2k+1\le n}\binom{n}{2k+1}$