# Semaine de colles n°7 du 13/11/23 au 17/11/23

## Du programme précédent :

### • Calcul de sommes et de produits

**I – Le symbole Σ**

- Notation Σ pour les sommes
- Règles de calcul : termes constants, facteur constant, changement d'indice, symétrie, sommes télescopiques.
- Séparation des termes pairs et impairs
- Sommes classiques : $\sum_{k=1}^{n} k$ , $\sum_{k=1}^{n} k^2$ **(*)** et $\sum_{k=1}^{n} k^3$ .
- Sommes de type géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On a : $\sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} q^p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ **(*)**
- Formule de Bernoulli : $\forall\ (x,y) \in \mathbb{C}^2, \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$
- Cas des sommes doubles, Sommes triangulaires : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x_{i,j} = \sum_{1\le j\le i\le n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} x_{i,j}$

**II – Le symbole Π**

- Notation Π pour les produits
- Règles de calcul, produits télescopiques.

**III – Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie**

- Définition de n !, de $\binom{n}{k}$, valeurs particulières, symétrie et Si $1 \le k \le n$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- Formule du triangle de Pascal et formule du binôme de Newton.
- Application à la trigonométrie : **(*)** *– Un exercice utilisant une des deux méthodes ci-dessous.*

Pour transformer des produits de $\cos^p x$ et $\sin^q x$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, en somme de $\cos(kx)$ et $\sin(lx)$ où $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ :

Utiliser les formules d'Euler puis appliquer la formule du binôme de Newton.

Pour exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, avec $n$ entier, en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ :

On a : $\cos(nx) = \mathrm{Re}(e^{inx}) = \mathrm{Re}( (\cos x + i \sin x)^n )$ et $\sin(nx) = \mathrm{Im}(e^{inx}) = ..$ d'après la formule de De Moivre

Ensuite, on utilise la formule du binôme de Newton.

## Nouveau cours :

### • Compléments sur la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle

Aucune théorie sur la décomposition en éléments simples n'est au programme… par contre, il faut savoir décomposer, sans aide, en éléments simples une fraction rationnelle simple.
Conformément au programme : « Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie »

### • Calcul de primitives et d'intégrales

*Ce chapitre n'a pas pour but de permettre de résoudre des exercices théoriques d'intégration.*

**I – Rappels et compléments**

- Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné, relation de Chasles, linéarité, positivité et ordre.
- Lien entre primitives et intégrales.

**II – Quelques méthodes de calcul**

- Primitives usuelles (en lisant le tableau des dérivées « à l'envers »)
- Transformations judicieuses d'expressions / reconnaitre des dérivées de fonctions composées

Ex. calcul de $\int_0^{\pi/4} \tan t\, dt$ , $\int_0^{\pi/4} \tan^2 t\, dt$ , $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ , $\int_0^{\pi} \sin(2t) e^{\sin^2 t}\, dt$ , $\int_{-2}^{2} \sqrt{t+2}\, dt$ , $\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^3} dt$

- Primitives de fonctions de la forme : $x \longmapsto \cos^p x \sin^q x$

Rq. Si $p$ ou $q$ est impair, on peut faire apparaitre des termes de la forme « $u'(x) \times (u(x))^n$ »

- 2 méthodes pour déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos(\omega x)e^{\lambda x}$ ou $x \longmapsto \sin(\omega x)e^{\lambda x}$

En utilisant que $\cos(\omega x)e^{\lambda x} = \mathrm{Re}(e^{(\lambda + i\omega)x})$

Ou en cherchant une primitive sous la forme $x \longmapsto (A\cos(\omega x) + B \sin(\omega x))\, e^{\lambda x}$

Une question de cours pourra être le calcul d'une primitive d'une fonction de cette forme. **(*)**

- Primitives de fonctions rationnelles :

Primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ dans le cas de pôle simple / pôle double. **(*)** (sur un exemple)

Ex. Primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

**III – Formule d'intégration par parties**

- Intégration par parties pour les fonctions de **classe $C^1$**, application au calcul de primitives.

Ex. Primitives de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$ **(*)**

**(*)** Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n°8 : Calcul de primitives et d'intégrales : changement de variable + EDL

## Déroulement d'une colle

1. Un ou deux calcul(s) parmi :
   - Question de cours signalée par (*)
   - Un exemple d'application du binôme de Newton à la trigonométrie.
   - Primitive/intégrale (sans IPP)
2. Exercice(s) : On pourra commencer par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous)

Une question de cours non connue entraine une note < 10.

# Semaine de colles n°7 du 13/11/23 au 17/11/23 - Exercices à savoir refaire

## Exercices Chap. 5

**Exercice 4 :** Calculer les sommes suivantes (suivant les cas $n$ appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

**1.** $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$ **2.** $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ **3.** $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ **7.** $S_7 = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$

**Exercice 5 :** *Sommes doubles.*
Calculer les sommes suivantes (suivant les cas $n$ appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

**1.** $S_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} \frac{i}{k+1}$ **2.** $S_2 = \displaystyle\sum_{1\leq i,\, j\leq n} ij$ **3.** $S_3 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i, j)$ **4.** $S_4 = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (i+j)$

**Exercice 6 :**

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka^k$

**1.** Calculer $S_n$ lorsque $a = 1$.
**2.** Lorsque $a \neq 1$, calculer $a\,S_n - S_n$ et en déduire la valeur de $S_n$.
**3.** Lorsque $a \neq 1$, retrouver le résultat précédent en remarquant que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a^k$ .

**Exercice 12 :**
Calculer les produits suivants : (suivant les cas $n$ appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

**a.** $P_1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ **b.** $P_2 = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ **c.** $P_3 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2^k 3^{-k}$ **d.** $P_4 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$

**Exercice 13 :**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x)$ .

**1.** Calculer $P(x)$ dans le cas où $x \equiv 0\ [\pi]$.
**2.** Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, simplifier $\sin(x)P(x)$ et déterminer $P(x)$.

**Exercice 14 :**
Calculer les sommes suivantes ($n$ appartient à $\mathbb{N}$) :

**1.** $S_1' = \displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k}$ et $S_1'' = \displaystyle\sum_{0\leq 2k+1\leq n} \binom{n}{2k+1}$

**Exercice 17 :**

**1.** Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. Montrer que : $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$ Formule à connaître

**2.** Calculer les sommes suivantes : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$, $S' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$ et $S'' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}\binom{n}{k}$.

**Exercice 18 :**
**1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto (x+1)^n$. Développer l'expression de $f(x)$, de $f'(x)$ et de $f''(x)$.

**2.** En déduire les valeurs de : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ et $S' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

**3.** Calculer : $S'' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

## Exercices Chap. 6

Pas de liste d'exercices à savoir refaire pour ce chapitre :
Il faut savoir calculer des intégrales et primitives

À vous de vous entrainer sur les exos de la feuille de TD (déjà faits ou dont vous avez eu la correction)