Semaine de colles n°10 du 04/12/23 au 08/12/23

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Équations différentielles linéaires (EDL)

I – Vocabulaire général sur les équations différentielles

II – EDL d'ordre 1 de la forme $y' + a(x)\, y = b(x)$ (E), où a et b continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$

III – EDL 2 à coefficients constants : $ay''+by'+cy=\varphi(x)$ (E)

- Équation homogène associée à (E) et forme des solutions : Les solutions de l'EDL 2 (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière de (E) :
- Expression de la solution générale de l'équation homogène associée (H).
  Cas où les coefficients sont **réels** (expression des solutions à **valeurs réelles**).
- Recherche d'une solution particulière : pp. de superposition des solutions, solution évidente, recherche d'une solution de la même forme que le second membre.

Exemples fait dans le cours : $y''-5y'+6y=e^{2x}+5e^{-x}$ et $y''+y'+y=x\cos x+1$

- Conditions initiales : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

Vu en TD :

- Exemple de raccord des solutions
- Exemple de changement de fonction inconnue pour la résolution d'EDL (cf. ex. à savoir refaire)
- Exemple de changement de variable pour la résolution d'EDL (cf. ex. à savoir refaire)

NOUVEAU COURS :

• Ensembles et applications

I – Notions sur les ensembles

- Inclusion, appartenance, ensemble des parties d'un ensemble E.
- Opérations sur les parties d'un ensemble :
  Réunion, intersection, distributivité.
  Complémentaire, lois de Morgan
  Différence.
- Recouvrement disjoint, partition
- Produit cartésien d'ensembles.

II – Applications

- Définition et exemples : application identité, fonction indicatrice, famille d'éléments
- Restriction, prolongement d'applications, application induite, composition de deux applications.
- Image directe et image réciproque.

Notation : Si $f : E \longrightarrow F$, on note : $f(E) = \text{Im } f$ et s'appelle l'image de f.

Rq. Pour éviter des confusions, pour le moment, l'image réciproque de B peut être notée : $f^{-1}(B)$

⚠ **On fera particulièrement attention à la notation « f^{-1} (B) » qui ne signifie pas que f est bijective !**

III – Injectivité, surjectivité, bijectivité

- Définition et caractérisation d'une application injective.
  La composée de deux applications injectives est injective. **(*)**
  Si $g \circ f$ est injective alors f est injective. **(*)**
- Définition et caractérisation d'une application surjective.
  La composée de deux applications surjectives est surjective. **(*)**
  Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. **(*)**
- Définition d'une application bijective, application réciproque, propriétés, bijection réciproque d'une composée.
- Soit $f : E \longrightarrow F$. S'il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$ alors f bijective et $g = f^{-1}$.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 11 : Nouvelles fonctions usuelles

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions le cours sur le chapitre : « Ensembles et applications » :
   - Parmi celles signalées par (*)
   - Donner les définitions et caractérisations d'image directe et d'image réciproque et donner des exemples.
   - Donner les définitions et caractérisations d'application injective/surjective/bijective et savoir donner des exemples et contre-exemples.
   - Trouver des exemples où $g \circ f$ injective et g non injective, $g \circ f$ surjective et f non surjective, etc…
2. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Semaine de colles n°10 du 04/12/23 au 08/12/23 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 7

Il faut savoir et résoudre des EDL 1 et EDL 2 à coefficients constants.
À vous de vous entrainer sur les exos de la feuille de TD (déjà faits ou dont vous avez eu la correction)

Exercice 12 : *Changement de fonction inconnue.*
On considère l'équation $(x^2 + x)\, y'' + (x-1)\, y' - y = 0$. (E)
1. Déterminer les fonctions polynômiales, non nulles, solutions de (E).
2. Sur $]1, +\infty[$, poser $y : x \longmapsto (x-1)z(x)$ où z est 2 fois dérivable et résoudre (E) sur $]1, +\infty[$.

On donne : $\forall\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\},\ \dfrac{3x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{2}{x+1}$
(Vous devez être capable de retrouver ce développement en éléments simples)

Exercice 14 : *Changement de variable.*
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'équation différentielle $x^2y'' + x\,y' + y = 0$ (E), en posant $x = e^t$.

Exercice 17 :
Trouver toutes les fonctions f réelles, dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$.
Ind. On justifiera que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercices Chap. 7 - Complément : raccord de solutions

Exercice 1 :
On considère l'équation différentielle (E) suivante : $(1-x)y' + xy = e^x$
1. a. Résoudre (E) sur $I_1 =]-\infty, 1[$.
b. Résoudre (E) sur $I_2 =]1, +\infty[$.
2. Dans cette question on suppose qu'il existe f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
a. Donner la forme de f sur $\mathbb{R}$.
b. Justifier que f est continue en 1. Que peut-on en déduire ?
c. Justifier que f est dérivable 1. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercices Chap. 8

Exercice 6 : ***Image directe.***
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On considère A, B et A′ trois parties de E.
1. Rappeler la définition de l'image directe de A par f.
2. a. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f([0, 2])$ et $f([-3, 2])$.
b. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos x$, déterminer $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ et $f(\pi\mathbb{Z})$.
3. Que signifie la condition $\mathrm{Im}(f) = F$?
4. Démontrer que si $A \subset A' \subset E$ alors $f(A) \subset f(A')$.
5. a. Montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
b. Montrer que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. A t-on l'égalité ?
c. Montrer que si f est injective alors $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Exercice 7 : ***Image réciproque.***
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On considère A, B et B′ trois parties de F.
1. Rappeler la définition de l'image réciproque de B par f. Que vaut $f^{-1}(F)$?
2. a. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f^{-1}([-4, 4])$ et $f^{-1}([1, 4])$.
b. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos x$, déterminer $f^{-1}([-4, 0])$ et $f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$.
3. Démontrer que si $B \subset B' \subset F$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
4. a. Montrer que : $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
b. Montrer que : $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
5. Montrer que : $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

On fera particulièrement attention à la notation « f^{-1} (B) » qui ne signifie pas que f est bijective !
Si $f : E \longrightarrow F$ et B une partie de F alors f^{-1} (B) existe toujours et est l'image réciproque de B par f.
Par contre, pour $x \in F$, $f^{-1}(x)$ n'a de sens que si f est bijective.

Exercice 10 :
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. Montrer que : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Exercice 12 :
a. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}
b. Soit $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{2\}$ définie par : $\forall\ z \in \mathbb{C}\backslash\{1\},\ f(z) = \dfrac{2z+1}{z-1}$. Montrer que l'application f est bijective et déterminer f^{-1}.
c. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$. L'application f est-elle bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}.

d. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, 3x - y, 2x + y)$.
L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}. Que vaut $f(\mathbb{R}^2)$?
e. Soit $\phi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f'$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 17 :
Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que : $f \circ f \circ f = f$. Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective.