

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• Ensembles et applicationsI - Notions sur les ensembles

- ➔ Inclusion, appartenance, ensemble des parties d'un ensemble E.
- ➔ Opérations sur les parties d'un ensemble :
Réunion, intersection, distributivité.
Complémentaire, lois de Morgan
Différence.
- ➔ Recouvrement disjoint, partition
- ➔ Produit cartésien d'ensembles.

II - Applications

- ➔ Définition et exemples : application identité, fonction indicatrice, famille d'éléments
- ➔ Restriction, prolongement d'applications, application induite, composition de deux applications.
- ➔ Image directe et image réciproque.

Notation : Si $f : E \rightarrow F$, on note : $f(E) = \text{Im } f$ et s'appelle l'image de f .

Rq. Pour éviter des confusions, pour le moment, l'image réciproque de B peut être notée : $f^{-1}(B)$

⚠ On fera particulièrement attention à la notation « $f^{-1}(B)$ » qui ne signifie pas que f est bijective !

III - Injectivité, surjectivité, bijectivité

- ➔ Définition et caractérisation d'une application injective.
La composée de deux applications injectives est injective. (*)
Si $g \circ f$ est injective alors f est injective. (*)
- ➔ Définition et caractérisation d'une application surjective.
La composée de deux applications surjectives est surjective. (*)
Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. (*)
- ➔ Définition d'une application bijective, application réciproque, propriétés, bijection réciproque d'une composée.
- ➔ Soit $f : E \rightarrow F$. S'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$ alors f bijective et $g = f^{-1}$.

NOUVEAU COURS :• Nouvelles fonctions usuellesI - Fonctions circulaires réciproques

➔ Fonctions circulaires réciproques : définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles).

Justification de la dérivabilité et calcul de la dérivée des fonctions arccos, arcsin et arctan (*)

En particulier, il faut savoir démontrer que : $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

➔ On a : $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x < 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ (*)

II - Fonctions hyperboliques directes : ch et sh

➔ Définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles), $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.

➔ Complément : étude de la fonction tangente hyperbolique. Cette fonction est hors programme.

III - Retour sur le calcul de primitives et d'intégrales

➔ Primitives de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur $] -a, a[$ et primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ sur \mathbb{R}

➔ Primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

Rq. Il ne s'agit pas de connaître les formules par cœur mais il faut savoir appliquer la méthode sur un exemple choisi par l'interrogateur.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 12 : Les ensembles \mathbb{N} et \mathbb{Z}

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours sur le chapitre : « Ensembles et applications » :
- Une question parmi celles signalées par (*)
- Il faut savoir donner les définitions et caractérisations d'image directe et d'image réciproque, et savoir donner des exemples.
- Il faut savoir donner les définitions et caractérisations d'application injective/surjective/bijjective et savoir donner des exemples et contre-exemples.
2. Sur le chap. « Nouvelles fonctions usuelles » :
Donner tous les résultats relatifs à l'une nouvelles fonctions : définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles).
Ou une question de cours parmi celles signalées par (*)
3. Exercice(s)

Un cours non connu entraîne une note < 10.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Exercices Chap. 8

Exercice 6 : Image directe.

Soit $f: E \rightarrow F$ une application. On considère A, B et A' trois parties de E .

1. Rappeler la définition de l'image directe de A par f .

2. a. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f(\{0, 2\})$ et $f(\{-3, 2\})$.

b. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos x$, déterminer $f(\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\})$ et $f(\pi\mathbb{Z})$.

3. Que signifie la condition $\text{Im}(f) = F$?

4. Démontrer que si $A \subset A' \subset E$ alors $f(A) \subset f(A')$.

5. a. Montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

b. Montrer que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. A t-on l'égalité ?

c. Montrer que si f est injective alors $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Exercice 7 : Image réciproque.

Soit $f: E \rightarrow F$ une application. On considère A, B et B' trois parties de F .

1. Rappeler la définition de l'image réciproque de B par f . Que vaut $f^{-1}(F)$?

2. a. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f^{-1}([-4, 4])$ et $f^{-1}(\{1, 4\})$.

b. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos x$, déterminer $f^{-1}([-4, 0])$ et $f^{-1}(\{0, \frac{1}{2}\})$.

3. Démontrer que si $B \subset B' \subset F$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

4. a. Montrer que : $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

b. Montrer que : $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

5. Montrer que : $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

**⚠ On fera particulièrement attention à la notation « $f^{-1}(B)$ » qui ne signifie pas que f est bijective !
Si $f: E \rightarrow F$ et B une partie de F alors $f^{-1}(B)$ existe toujours et est l'image réciproque de B par f .
Par contre, pour $x \in F$, $f^{-1}(x)$ n'a de sens que si f est bijective.**

Exercice 10 :

Soit $f: E \rightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F . Montrer que : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Exercice 12 :

a. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Si oui, déterminer f^{-1} .

b. Soit $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{2\}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, f(z) = \frac{2z+1}{z-1}$. Montrer que l'application f est bijective et déterminer f^{-1} .

c. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$. L'application f est-elle bijective ? Si oui, déterminer f^{-1} .

d. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, 3x - y, 2x + y)$.

L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Si oui, déterminer f^{-1} . Que vaut $f(\mathbb{R}^2)$?

e. Soit $\phi: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f'$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 17 :

Soit E un ensemble et $f: E \rightarrow E$ une application telle que : $f \circ f \circ f = f$. Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective.

Exercices Chap. 9

Exercice 3 :

Déterminer le domaine de définition et courbe représentative des fonctions : $f: x \mapsto \arcsin(\sin x)$ et $g: x \mapsto \arccos(\cos x)$.

Exercice 6 :

Calculer les valeurs exactes des réels suivants : b. $B = \arctan 2 + \arctan 3$

Exercice 8 :

Résoudre les équations suivantes : a. $\arccos x = \arcsin(2x)$

Exercice 10 :

Simplifier les expressions suivantes : a. $\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)$

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition.

À l'aide des théorèmes généraux, déterminer sur quel(s) intervalle(s) f est dérivable. Calculer la dérivée de f sur ces intervalles.

2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

3. a. Démontrer que : $\forall x \in [-1, 1], f(x) = 2\arctan x$.

b. Déterminer des expressions similaires de $f(x)$ sur les autres intervalles de l'ensemble de définition de f .

4. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode, les résultats de la question 3.

a. Soit $t \in]-\pi, \pi[$. Exprimer $\sin t$ en fonction de $\tan \frac{t}{2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\theta = 2\arctan x$.

b. Dans quel intervalle varie θ ? Que vaut x en fonction de θ ?

c. Donner une expression de $f(x)$ en fonction de θ .

d. Retrouver l'expression de $f(x)$ en fonction de x obtenue à la question 3.

Les 4 exercices suivants sont à travailler seuls :

Exercice 21 : Fonctions rationnelles.

Calculer une primitive des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble de validité. 3. $x \mapsto \frac{x-1}{x^2+x+1}$

Exercice 23 : Calcul de primitives.

Calculer une primitive des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble de validité.

$$1. x \mapsto \arcsin x \qquad 5. x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(x+3)}} \text{ en posant : } u = \sqrt{x}$$

Exercice 24 : Calcul d'intégrales.

Calculer la valeur des intégrales suivantes. On commencera par justifier leur existence.

$$1. I_1 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx \qquad 2. I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x+i} dx$$

Exercice 25 :

2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $\text{ch}(x)y' + \text{sh}(x)y = 1 + x^2$ et trouver les solutions telles que $y(0) = 1$.