Semaine de colles n°12 du 18/12/23 au 22/12/23

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Nouvelles fonctions usuelles

I – Fonctions circulaires réciproques

- Fonctions circulaires réciproques : définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles).

Il faut savoir justifier la dérivabilité et calcul de la dérivée des fonctions arccos, arcsin et arctan

En particulier, il faut savoir démontrer que : $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos(x)) = \cos(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

- On a : $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x < 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

II – Fonctions hyperboliques directes : ch et sh

- Définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles), $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$.
- Complément : étude de la fonction tangente hyperbolique. **Cette fonction est hors programme.**

III – Retour sur le calcul de primitives et d'intégrales

- Primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ sur $]-a, a[$ et primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + a^2}$ sur $\mathbb{R}$
- Primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$

Rq. Il ne s'agit pas de connaitre les formules par cœur mais il faut savoir appliquer la méthode sur un exemple choisi par l'interrogateur.

NOUVEAU COURS :

• Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

I – Les entiers naturels et le principe de récurrence

- L'ensemble $\mathbb{N}$.
- Raisonnement par récurrence simple, double/avec deux prédécesseurs, forte et finie.

II – Les entiers relatifs

- L'ensemble $\mathbb{Z}$, Multiples et diviseurs d'un entier, PGCD et PPCM

III – Division euclidienne

- Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ **(*)**
- Algorithme d'Euclide pour le calcul d'un PGCD

IV – Nombres premiers

- Nombres premiers, décomposition en facteurs premiers (admis)
  L'ensemble des nombres premiers est infini **(*)**
- Application au calcul du PGCD et PPCM, PGCD(a, b) $\times$ PPCM(a, b) = ab

• Suites numériques

I – Généralités

- Définition d'une suite, propriété vraie APCR.
- Opérations sur les suites
- Vocabulaire : suites constantes, stationnaires, majorées, minorées, bornées, monotones, périodiques, extraites.
- La suite (u_n) est bornée $\Leftrightarrow$ la suite $(|u_n|)$ est majorée

II – Suites convergentes

- Définition de la convergence d'une suite, unicité de la limite d'une suite convergente **(*)**
- Encadrement d'une suite cv. : Toute suite cv. est bornée et si (u_n) cv. vers $\ell > 0$ alors APCR, $u_n > \frac{\ell}{2} > 0$.
- Suites extraites et convergence, cas de la convergence de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vers la même limite ℓ.
  Application : utilisation de suite(s) extraite(s) pour montrer la divergence d'une suite.
- Opérations sur les limites : somme de 2 suites cv. vers 0 **(*)**, produit d'une suite bornée et d'une suite cv. vers 0, cas général.
- Limites et ordre : passage à la limite des inégalités larges, th. de convergence par encadrement (dit des gendarmes).
- Th. de la limite monotone **(*)** (Démonstration faite en classe pour une suite croissante)
- Suites adjacentes : définition et convergence :
  Application aux approximations décimales d'un réel, tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Rq pour les interrogateurs : nous avons fait que très peu d'exercices sur ce chapitre.

Prévisions semaine n° 13 : Les suites numériques (fin) + Suites récurrentes linéaires.

Déroulement d'une colle

1. Sur le chapitre « Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ » :
   Une question parmi celles signalées par (*)
   Ou un exercice à traiter à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple, double ou forte.
2. Sur le chapitre « Suites numériques » :
   Une question parmi celles signalées par (*)
   Ou vu en TD : Pour une suite (un) à valeurs entières, on a : (un) convergente $\Leftrightarrow$ (un) stationnaire
3. Exercice(s) sur les chapitres « Nouvelles fonctions usuelles » et « Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ » :

Un cours non connu entraine une note < 10.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Semaine de colles n°12 du 18/12/23 au 22/12/23 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 9

Exercice 3 :
Déterminer le domaine de définition et courbe représentative des fonctions : $f : x \longmapsto \arcsin(\sin x)$ et $g : x \longmapsto \arccos(\cos x)$.

Exercice 6 :
Calculer les valeurs exactes des réels suivants : **b.** $B = \arctan 2 + \arctan 3$

Exercice 8 :
Résoudre les équations suivantes : **a.** $\arccos x = \arcsin(2x)$

Exercice 10 :
Simplifier les expressions suivantes : **a.** $\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$

Exercice 11 :
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition.
À l'aide des théorèmes généraux, déterminer sur quel(s) intervalles(s) f est dérivable. Calculer la dérivée de f sur ces intervalles.
2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
3. a. Démontrer que : $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) = 2\arctan x$.
b. Déterminer des expressions similaires de $f(x)$ sur les autres intervalles de l'ensemble de définition de f.
4. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode, les résultats de la question 3.
a. Soit $t \in \,]-\pi, \pi[$. Exprimer $\sin t$ en fonction de $\tan \frac{t}{2}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\theta = 2\arctan x$.
b. Dans quel intervalle varie θ ? Que vaut x en fonction de θ ?
c. Donner une expression de $f(x)$ en fonction de θ.
d. Retrouver l'expression de $f(x)$ en fonction de x obtenue à la question 3.

Exercice 15 :
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation **:** $\mathrm{ch}\, x \geq 2$.

Exercice 19 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$, $x \in \mathbb{R}$.

Les 4 exercices suivants sont à travailler seuls :

Exercice 21 : *Fonctions rationnelles.*
Calculer **une** primitive des fonctions suivantes, **en précisant l'ensemble de validité**. **3.** $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$

Exercice 23 : *Calcul de primitives.*
Calculer **une** primitive des fonctions suivantes, **en précisant l'ensemble de validité.**

1. $x \longmapsto \arcsin x$ **5.** $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+3)}$ en posant : $u = \sqrt{x}$

Exercice 24 : *Calcul d'intégrales.*
Calculer la valeur des intégrales suivantes. On commencera par **justifier leur existence.**

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}dx$ **2.** $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+i}dx$

Exercice 25 :
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{ch}(x)\, y' + \mathrm{sh}(x)\, y = 1 + x^2$ et trouver les solutions telles que $y(0) = 1$.

Exercices Chap. 10

Exercice 11 :
1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation suivante : $3x^2 + xy - 11 = 0$.

Exercice 12 :
Étant donné $n \in \mathbb{N}$, montrer que $2^n + 3^n$ et $2^{n+1} + 3^{n+1}$ n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exercice 15 :
Soit a et p deux entiers supérieurs à 2. Montrer que si $a^p - 1$ est premier alors $a = 2$ et p est premier.

Exercice 17 :
Soit a, b et n trois entiers tels que $a \geq 1$, $b \geq 1$ et $n \geq 0$. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b.
Trouver le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.