Semaine de colles n°13 du 8/01/24 au 13/01/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

I - Les entiers naturels et le principe de récurrence

- L'ensemble $\mathbb{N}$.
- Raisonnement par récurrence simple, double/avec deux prédécesseurs, forte et finie.

II - Les entiers relatifs

- L'ensemble $\mathbb{Z}$, Multiples et diviseurs d'un entier, PGCD et PPCM

III - Division euclidienne

- Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ **(*)**
- Algorithme d'Euclide pour le calcul d'un PGCD

IV - Nombres premiers

- Nombres premiers, décomposition en facteurs premiers (admis)
  L'ensemble des nombres premiers est infini **(*)**
- Application au calcul du PGCD et PPCM, PGCD(a, b) $\times$ PPCM(a, b) = ab

• Suites numériques

I - Généralités

- Définition d'une suite, propriété vraie APCR.
- Opérations sur les suites
- Vocabulaire : suites constantes, stationnaires, majorées, minorées, bornées, monotones, périodiques, extraites.
- La suite (u_n) est bornée $\Leftrightarrow$ la suite $(|u_n|)$ est majorée

II - Suites convergentes

- Définition de la convergence d'une suite, unicité de la limite d'une suite convergente **(*)**
- Encadrement d'une suite cv. : Toute suite cv. est bornée et si (u_n) cv. vers $\ell > 0$ alors APCR, $u_n > \frac{\ell}{2} > 0$.
- Suites extraites et convergence, cas de la convergence de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vers la même limite ℓ.
  Application : utilisation de suite(s) extraite(s) pour montrer la divergence d'une suite.
- Opérations sur les limites : somme de 2 suites cv. vers 0, produit d'une suite bornée et d'une suite cv. vers 0, cas général.
- Limites et ordre : passage à la limite des inégalités larges, th. de convergence par encadrement (dit des gendarmes).
- Th. de la limite monotone **(*)** (Démonstration faite en classe pour une suite croissante)
- Suites adjacentes : définition et convergence :
  Application aux approximations décimales d'un réel, tout réel est limite d'une suite de rationnels.

NOUVEAU COURS :

• Suites numériques

III - Limites infinies

- Définition, opérations sur les limites infinies, formes indéterminées.
- Limites infinies et ordre, th. de la limite monotone. **(*)** (Démonstration faite pour une suite croissante)

IV - Suites complexes

- Définition, suites bornées, limite, caractérisation à l'aide des parties réelles et imaginaires.
- Propriétés restant valables pour les suites complexes.

• Compléments : les suites récurrentes linéaires

I - Suites arithmétiques

II - Suites géométriques : Rappels succincts + Cas de convergence des suites géométriques complexes

III - Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou arithmético-géométriques

IV - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Méthode d'étude provisoirement admise)

- Cas des suites complexes et réelles.

⚠ Rq. interrogateurs :
Les suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ n'ont pas encore été vue en classe.
Elles seront traitées après le chapitre sur la dérivabilité.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 14 : Suites numériques (relations de comparaison)

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Déterminer le terme général d'une SRL1 ou SRL2 + calcul éventuel de la limite.
3. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°13 du 8/01/24 au 13/01/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 10

Exercice 11 :
1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation suivante : $3x^2 + xy - 11 = 0$.

Exercice 12 :
Étant donné $n \in \mathbb{N}$, montrer que $2^n + 3^n$ et $2^{n+1} + 3^{n+1}$ n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exercice 15 :
Soit a et p deux entiers supérieurs à 2. Montrer que si $a^p - 1$ est premier alors $a = 2$ et p est premier.

Exercice 17 :
Soit a, b et n trois entiers tels que $a \geq 1$, $b \geq 1$ et $n \geq 0$. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b.
Trouver le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercices Chap. 11

Exercice 2 :
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite réelle à valeurs entières. Prouver qu'elle est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 5 :
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 6 : ***Théorème de Cesàro.***
On considère (u_n) une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. On définit (v_n) par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Dans cette question, on suppose que $\ell = 0$.

a. Soit $\varepsilon > 0$. On fixe un entier N non nul tel que $n \geq N$ implique que $|\, u_n \,| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. *(On pensera à justifier l'existence de N)*

Démontrer que pour tout $n \geq N$, $|\, v_n \,| \leq \dfrac{|u_1| + \ldots + |u_{N-1}|}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

b. En déduire qu'il existe un entier N′ non nul tel que $n \geq N'$ implique que $|v_n| \leq \varepsilon$.

c. Conclure que (v_n) est convergente vers 0.

2. En vous ramenant au cas précédent, démontrer que la propriété est encore valable si ℓ est un réel quelconque.

Exercice 8 :
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9 :
On cherche à montrer que la suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente. Par l'absurde, on suppose qu'elle est convergente vers une limite ℓ.
1. En calculant la limite de la suite extraite $(\cos(2n))_{n \in \mathbb{N}}$ de deux façons différentes, en déduire les valeurs que peut prendre ℓ.
2. Calculer la limite de la suite $(\cos(n+1) + \cos(n-1))_{n \in \mathbb{N}}$ de deux façons différentes, en fonction de ℓ.
3. Conclure.

Exercice 12 : Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes dont on donne le terme général :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **2.** $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$ **5.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ **6.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

7. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$ **11.** $u_n = 2^n \sin\dfrac{\alpha}{2^n}$, $\alpha \in\,]0, \pi[$

Exercice 14 : ***Suite définie implicitement.***

⚠ LA MÉTHODE POUR ÉTUDIER LE SENS DE VARIATION D'UNE SUITE DÉFINIE IMPLICITEMENT DOIT ÊTRE CONNUE.

Pour tout entier $n \geq 3$ et pour tout réel $x > 0$, on pose : $f_n(x) = x - n \ln x$. On donne : $\ln(2) \approx 0{,}7$.
1. a. Soit $n \geq 3$. Étudier les variations de la fonction f_n sur son ensemble de définition.
b. Soit $n \geq 3$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in\,]1, 2[$ tel que : $f_n(x_n) = 0$.
2. a. Soit $n \geq 3$. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$.
En déduire que la suite (x_n) est monotone et donner son sens de monotonie.
b. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est convergente.
c. En utilisant que pour tout entier $n \geq 3$, $f_n(x_n) = 0$, montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$.

Exercice 18 :
1. Soit (u_n) une suite à termes positifs, décroissante et convergente vers 0. On définit la suite (S_n) par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.
Montrer que (S_n) est convergente. *<u>Ind.</u> On pourra montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.*
2. Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite. *<u>Ind.</u> On pourra utiliser que : $\forall\; k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,dt$.*