

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• Suites numériquesI - GénéralitésII - Suites convergentes

- ➔ Définition de la convergence d'une suite, unicité de la limite d'une suite convergente
- ➔ Encadrement d'une suite cv. : Toute suite cv. est bornée et si (u_n) cv. vers $\ell > 0$ alors APCR, $u_n > \frac{\ell}{2} > 0$.
- ➔ Suites extraites et convergence, cas de la convergence de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vers la même limite ℓ .
Application : utilisation de suite(s) extraite(s) pour montrer la divergence d'une suite.
- ➔ Opérations sur les limites : somme de 2 suites cv. vers 0, produit d'une suite bornée et d'une suite cv. vers 0, cas général.
- ➔ Limites et ordre : passage à la limite des inégalités larges, th. de convergence par encadrement (dit des gendarmes).
- ➔ Th. de la limite monotone (*) (Démonstration faite en classe pour une suite croissante)
- ➔ Suites adjacentes : définition et convergence :
Application aux approximations décimales d'un réel, tout réel est limite d'une suite de rationnels.

III - Limites infinies

- ➔ Définition, opérations sur les limites infinies, formes indéterminées.
- ➔ Limites infinies et ordre, th. de la limite monotone. (*) (Démonstration faite pour une suite croissante)

IV - Suites complexes

- ➔ Définition, suites bornées, limite, caractérisation à l'aide des parties réelles et imaginaires.
- ➔ Propriétés restant valables pour les suites complexes.

• Compléments : les suites récurrentes linéairesI - Suites arithmétiques

II - Suites géométriques : Rappels succincts + Cas de convergence des suites géométriques complexes

III - Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou arithmético-géométriquesIV - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Méthode d'étude provisoirement admise)

- ➔ Cas des suites complexes et réelles.

Rq. interrogateurs :

Les suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ n'ont pas encore été vue en classe. Elles seront traitées après le chapitre sur la dérivabilité.

NOUVEAU COURS :• Suites numériques : Relations de comparaison

- ➔ Relation de domination, suite négligeable devant une autre, suites équivalentes : définitions, caractérisations par le quotient $\frac{u_n}{v_n}$, propriétés, compatibilité avec les opérations.
- ➔ Exemples de référence :
 - Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$
 - Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$, $n^\alpha = o(e^{\gamma n})$ ou autre formulation : Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 1$, $n^\alpha = o(x^n)$
 - Si $x > 0$, $x^n = o(n!)$
 - $n! = o(n^n)$
- ➔ ⚠ ON NE PEUT PAS AJOUTER DES ÉQUIVALENTS !!!! ON NE PEUT PAS COMPOSER DES ÉQUIVALENTS !!!!
- ➔ Lien entre équivalents et la limite d'une suite.

Rq. On pourra s'assurer que les élèves ont appris les définitions avec des petites démonstrations du type :

Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$ (*)

- ➔ Obtention d'un équivalent à l'aide d'un encadrement.
- ➔ Équivalents de références (à savoir redémontrer (*))

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers 0. On a :

- | | | |
|--|---------------------------|--|
| • $\sin u_n \sim u_n$ et $\tan u_n \sim u_n$ | • $e^{u_n} \sim 1$ | • Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, fixé : $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ |
| • $\cos u_n \sim 1$ et $1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$ | • $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ | • $\arccos(u_n) \sim \frac{\pi}{2}$ |
| • $\operatorname{sh} u_n \sim u_n$ et $\operatorname{ch} u_n \sim 1$ | • $\ln(u_n + 1) \sim u_n$ | • $\arcsin(u_n) \sim u_n$ et $\arctan(u_n) \sim u_n$ |

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 15 : Continuité

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions parmi :
 - Un calcul de limite en utilisant ou non les équivalents
 - Étude d'une SRL1 ou SRL2 + calcul éventuel de la limite.
 - Une question de cours parmi celles signalées par (*)
1. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Exercices Chap. 11Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite réelle à valeurs entières. Prouver qu'elle est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 6 : Théorème de Cesàro.

On considère (u_n) une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. On définit (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

1. Dans cette question, on suppose que $\ell = 0$.

a. Soit $\varepsilon > 0$. On fixe un entier N non nul tel que $n \geq N$ implique que $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. (On pensera à justifier l'existence de N)

Démontrer que pour tout $n \geq N$, $|v_n| \leq \frac{|u_1| + \dots + |u_{N-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$.

b. En déduire qu'il existe un entier N' non nul tel que $n \geq N'$ implique que $|v_n| \leq \varepsilon$.

c. Conclure que (v_n) est convergente vers 0.

2. En vous ramenant au cas précédent, démontrer que la propriété est encore valable si ℓ est un réel quelconque.

Exercice 8 :

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9 :

On cherche à montrer que la suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente. Par l'absurde, on suppose qu'elle est convergente vers une limite ℓ .

1. En calculant la limite de la suite extraite $(\cos(2n))_{n \in \mathbb{N}}$ de deux façons différentes, en déduire les valeurs que peut prendre ℓ .

2. Calculer la limite de la suite $(\cos(n+1) + \cos(n-1))_{n \in \mathbb{N}}$ de deux façons différentes, en fonction de ℓ .

3. Conclure.

Exercice 12 : Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes dont on donne le terme général :

$$\begin{array}{llll} 1. u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & 2. u_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} & 5. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} & 6. u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \\ 7. u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor, x \in \mathbb{R} & 11. u_n = 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}, \alpha \in]0, \pi[\end{array}$$

Exercice 14 : Suite définie implicitement.

⚠ LA MÉTHODE POUR ÉTUDIER LE SENS DE VARIATION D'UNE SUITE DÉFINIE IMPLICITEMENT DOIT ÊTRE CONNUE.

Pour tout entier $n \geq 3$ et pour tout réel $x > 0$, on pose : $f_n(x) = x - n \ln x$. On donne : $\ln(2) \approx 0,7$.

1. a. Soit $n \geq 3$. Étudier les variations de la fonction f_n sur son ensemble de définition.

b. Soit $n \geq 3$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in]1, 2[$ tel que : $f_n(x_n) = 0$.

2. a. Soit $n \geq 3$. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$.

En déduire que la suite (x_n) est monotone et donner son sens de monotonie.

b. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est convergente.

c. En utilisant que pour tout entier $n \geq 3$, $f_n(x_n) = 0$, montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

Exercice 18 :

1. Soit (u_n) une suite à termes positifs, décroissante et convergente vers 0. On définit la suite (S_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

Montrer que (S_n) est convergente. *Ind.* On pourra montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

2. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite. *Ind.* On pourra utiliser que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$.

Exercices Chap. 12Exercice : ex 8 chap. 11 + 3 chap. 12

0. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

2. En déduire que : $\forall n \geq 2$, $u_n - 1 \leq \ln(n) \leq u_n - \frac{1}{n}$.

3. En déduire que u_n est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = u_n - \ln n$. Montrer que (x_n) est convergente. On note γ cette limite, c'est la constante d'Euler.

Exercice 5 :

Déterminer, si elles existent, les limites des suites dont on donne le terme général ci-dessous :

$$\begin{array}{llll} 1. u_n = n \ln \left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \right) & 2. u_n = \sqrt{n} \sin \left(\frac{1}{\ln(n)} \right) & 3. u_n = n \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right) & 4. u_n = \sqrt{n^2 + 36n + 12} - n \\ 5. u_n = \sqrt[n+1] - \sqrt[n] & 6. u_n = n \left(\sin \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{2n} \right) & 7. u_n = \left(2 \sin \left(\frac{1}{n} \right) + \cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n & 8. u_n = \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{n^2} \end{array}$$