Semaine de colles n°15 du 22/01/24 au 26/01/24

Du programme précédent :

• Suites numériques : Relations de comparaison

- Relation de domination, suite négligeable devant une autre, suites équivalentes : définitions, caractérisations par le quotient $\frac{u_n}{v_n}$, propriétés, compatibilité avec les opérations.
- Exemples de référence :
  - Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$
  - Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$, $n^\alpha = o(e^{\gamma n})$ ou autre formulation : Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 1$, $n^\alpha = o(x^n)$
  - Si $x > 0$, $x^n = o(n!)$
  - $n! = o(n^n)$
- ⚠ On ne peut pas ajouter des équivalents !!!! On ne peut pas composer des équivalents !!!!
- Lien entre équivalents et la limite d'une suite.

Rq. On pourra s'assurer que les élèves ont appris les définitions avec des petites démonstrations du type :
Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$ **(*)**

- Obtention d'un équivalent à l'aide d'un encadrement.
- Équivalents de références (à savoir redémontrer **(*)**)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers 0. On a :

- $\sin u_n \sim u_n$ et $\tan u_n \sim u_n$
- $\cos u_n \sim 1$ et $1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$
- $\mathrm{sh}\, u_n \sim u_n$ et $\mathrm{ch}\, u_n \sim 1$
- $e^{u_n} \sim 1$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\ln(u_n + 1) \sim u_n$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé** : $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, u_n$
- $\arccos(u_n) \sim \frac{\pi}{2}$
- $\arcsin(u_n) \sim u_n$ et $\arctan(u_n) \sim u_n$

Nouveau cours :

• Limites et continuité

I – Limite d'une fonction et continuité

- Notion de voisinage
- Définition limite (finie ou infinie) en un point (fini ou infini)
- Unicité de la limite.
- Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
- Continuité en un point.
- Image d'une suite par une fonction, caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité en un point.
  Application : comment montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.
- Limite ou continuité à droite ou à gauche.

II – Règles de calculs

- Produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a.
- Opérations sur les limites : opérations algébriques et composition.
- Limite et ordre : signe et théorème d'encadrement dit des gendarmes.
- Théorème de la limite monotone.

III – Continuité sur un intervalle

- Définition, opérations sur les fonctions continues.
- Restriction et prolongement de fonctions continues, prolongement par continuité en un point.
- Image d'un intervalle par une fonction continue, théorème des valeurs intermédiaires, cas d'une fonction continue sur un **segment** de $\mathbb{R}$ (th des bornes atteintes).
- Bijection réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

IV – Extension aux fonctions à valeurs complexes

- Limite en un point, continuité, traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 16 :

Déroulement d'une colle

1. Définition de $f(x) \to L$ quand $x \to a$ (Un cas parmi les 9 possibles).
2. Une ou deux questions parmi :
   - Un calcul de limite en utilisant ou non les équivalents
   - Une question de cours parmi celles signalées par (*)
3. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°15 du 22/01/24 au 26/01/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 12

Exercice : ex 8 chap. 11 + 3 chap. 12

0. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?

1. Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

2. En déduire que : $\forall\, n \geq 2$ $u_n - 1 \leq \ln(n) \leq u_n - \frac{1}{n}$.

3. En déduire que u_n est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

4. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = u_n - \ln n$. Montrer que (x_n) est convergente. On note γ cette limite, c'est la *constante d'Euler*.

Exercice 5 :
Déterminer, si elles existent, les limites des suites dont on donne le terme général ci-dessous :

1. $u_n = n \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)$ **2.** $u_n = \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ **3.** $u_n = n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$ **4.** $u_n = \sqrt{n^2 + 36n + 12} - n$

5. $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ **6.** $u_n = n\left(\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{2n}\right)$ **7.** $u_n = \left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ **8.** $u_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2}$

Exercices Chap. 13

Exercice 4 :

Étudier la limite en 0 des fonctions $f : x \longmapsto \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ et de $g : x \longmapsto \frac{a}{x}\left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

Exercice 5 :
Déterminer, si elles existent, les limites de f en a.

a. $f : x \longmapsto e^{-x}\cos x$ en $a = +\infty$, puis $a = -\infty$. **b.** $f : x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$ en $a = 0$

c. $f : x \longmapsto \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$ en $a = 1$ **d.** $f : x \longmapsto \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1}}$ en $a = -1$

Exercice 6 :
Est-ce que les fonctions suivantes sont continues en 0 ? Prolongeables par continuité en 0 ?

1. $f_1 : x \longmapsto \frac{\tan 3x}{x}$ **2.** $f_2 : x \longmapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ **3.** $f_3 : x \longmapsto \exp\frac{1}{x}$

4. $f_4 : x \longmapsto \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{si } x \in\ ]-1, +\infty[\ \setminus \{0\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ **5.** $f_5 : x \longmapsto \cos\frac{1}{x}$ **6.** $f_6 : x \longmapsto \sin x \cos\frac{1}{x}$

Exercice 9 :
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1, telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 12 :

1. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 22 :
Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continue.
1. Démontrer que f admet un point fixe c'est-à-dire : $\exists\ c \in [a, b], f(c) = c$.
2. Prouver que ce point fixe est unique dans les deux cas suivants :
a. f est décroissante sur $[a, b]$.
b. f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$ avec $0 < k < 1$.

Exercice 26 :

Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell < 1$ en $+\infty$.

Montrer que f admet au moins un point fixe.