Semaine de colles n°16 du 29/01/24 au 02/02/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

- **Limites et continuité**

I – Limite d'une fonction et continuité

- Notion de voisinage
- Définition limite (finie ou infinie) en un point (fini ou infini)
- Unicité de la limite.
- Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
- Continuité en un point.
- Image d'une suite par une fonction, caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité en un point. Application : comment montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.
- Limite ou continuité à droite ou à gauche.

II – Règles de calculs

- Produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a.
- Opérations sur les limites : opérations algébriques et composition.
- Limite et ordre : signe et théorème d'encadrement dit des gendarmes.
- Théorème de la limite monotone.

III – Continuité sur un intervalle

- Définition, opérations sur les fonctions continues.
- Restriction et prolongement de fonctions continues, prolongement par continuité en un point.
- Image d'un intervalle par une fonction continue, théorème des valeurs intermédiaires, cas d'une fonction continue sur un **segment** de $\mathbb{R}$ (th des bornes atteintes).
- Bijection réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

IV – Extension aux fonctions à valeurs complexes

- Limite en un point, continuité, traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

NOUVEAU COURS :

- **Dérivation des fonctions à valeurs réelles**

I – Fonctions dérivables

- Dérivabilité en un point : nombre dérivé, interprétation graphique, dérivabilité à droite/gauche
- f est dérivable en $a \in I \Leftrightarrow$ Il existe $\beta \in \mathbb{R}$ et ε définie sur I tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)\,\beta + (x-a)\,\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \quad (\text{et alors } \beta = f'(a))\ (*).$$

- Dérivabilité globale, fonction dérivée, « dérivable $\Rightarrow$ continue ».

II – Opérations sur les dérivées

- Opérations algébriques, composition, dérivation d'une bijection réciproque.

III – Dérivations successives

- Définition, opérations sur les fonctions n fois dérivable, classe d'une fonction.

Ex. Dérivée n-ième de $x \longmapsto x^\alpha$, $x \longmapsto x^n$, $x \longmapsto e^{\alpha}$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}$, $x \longmapsto \ln|x-a|$ ***(*) Résultats à connaitre et à savoir démontrer (Savoir faire les récurrences même non faites en cours)***

- Formule de Leibniz, ex. calcul de la dérivée n-ième de $x \longmapsto (x^2 + 3x + 1)e^{2x}$

IV – Propriétés des fonctions dérivables

- Extremum local en un point intérieur à I.
- Théorème de Rolle **(*)**, Th. des accroissements finis **(*)**, Inégalités des accroissements finis.
- Obtention de la dérivabilité par limite de la dérivée.
- Sens de variations pour une fonction dérivable sur un intervalle et cas de la stricte monotonie.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 16 : Dérivabilité (fin) + Suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Déroulement d'une colle

1. Définition de $f(x) \to L$ quand $x \to a$ (Un cas parmi les 9 possibles).
2. Citer un théorème des chapitres continuité / dérivabilité : TVI, Th de Rolle, TAF, IAF , ...
3. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
4. Exercice(s)

   ⚠ Nous n'avons pas encore fait d'exercices sur la partie IV du chapitre « Dérivabilité »

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°16 du 29/01/24 au 02/02/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 13

Exercice 4 :

Étudier la limite en 0 des fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{x}{a}\left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor$ et de $g : x \longmapsto \dfrac{a}{x}\left\lfloor \dfrac{x}{b} \right\rfloor$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

Exercice 5 :
Déterminer, si elles existent, les limites de f en a.

a. $f : x \longmapsto e^{-x}\cos x$ en $a = +\infty$, puis $a = -\infty$.

b. $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ en $a = 0$

c. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$ en $a = 1$

d. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$ en $a = -1$

Exercice 6 :
Est-ce que les fonctions suivantes sont continues en 0 ? Prolongeables par continuité en 0 ?

1. $f_1 : x \longmapsto \dfrac{\tan 3x}{x}$

2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

3. $f_3 : x \longmapsto \exp \dfrac{1}{x}$

4. $f_4 : x \longmapsto \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{si } x \in \,]-1,+\infty[\, \setminus \{0\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

5. $f_5 : x \longmapsto \cos \dfrac{1}{x}$

6. $f_6 : x \longmapsto \sin x \cos \dfrac{1}{x}$

Exercice 9 :
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 12 :
1. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 22 :
Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continue.
1. Démontrer que f admet un point fixe c'est-à-dire : $\exists\ c \in [a, b], f(c) = c$.
2. Prouver que ce point fixe est unique dans les deux cas suivants :
a. f est décroissante sur $[a, b]$.
b. f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$ avec $0 < k < 1$.

Exercice 26 :
Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell < 1$ en $+\infty$.

Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 29 : *Équation fonctionnelle.*
Démontrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$, est égal à l'ensemble des homothéties de $\mathbb{R}$

Exercices Chap. 14

Exercice 2 :
1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\dfrac{x f(a) - a f(x)}{x-a}$ quand x tend vers a.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ quand h tend vers 0.

Exercice 10 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, si elle existe, la dérivée $n^{\text{ième}}$ des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto (x^2+1)e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$

2. $f : x \longmapsto \sin x\, e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

4. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1/3\}$

5. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Exercice 12 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f_n : x \longmapsto x^{n-1}\ln x$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $\forall x > 0,\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

Exercice 13 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f : x \longmapsto x^n(1+x)^n$ définie sur $\mathbb{R}$.
1. En utilisant la formule de Leibniz, déterminer, après avoir justifié son existence, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer, une autre expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.
3. En déduire la valeur de : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.