Programme Colles PCSI 3 - 2023/24

# Semaine de colles n°17 du 26/02/24 au 01/03/24

## DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

### • Dérivation des fonctions à valeurs réelles

**I – Fonctions dérivables**

- Dérivabilité en un point : nombre dérivé, interprétation graphique, dérivabilité à droite/gauche
- f est dérivable en $a \in I \Leftrightarrow$ Il existe $\beta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon$ définie sur I tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)\beta + (x-a)\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \quad (\text{et alors } \beta = f'(a))$$ (*).

- Dérivabilité globale, fonction dérivée, « dérivable $\Rightarrow$ continue ».

**II – Opérations sur les dérivées**

- Opérations algébriques, composition, dérivation d'une bijection réciproque.

**III – Dérivations successives**

- Définition, opérations sur les fonctions n fois dérivable, classe d'une fonction.

Ex. Dérivée n-ième de $x \longmapsto x^{\alpha}$, $x \longmapsto x^n$, $x \longmapsto e^{\alpha}$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}$, $x \longmapsto \ln|x-a|$ ***(*) Résultats à connaitre et à savoir démontrer (Savoir faire les récurrences même non faites en cours)***

- Formule de Leibniz, ex. calcul de la dérivée n-ième de $x \longmapsto (x^2 + 3x + 1)e^{2x}$

**IV – Propriétés des fonctions dérivables**

- Extremum local en un point intérieur à I.
- Théorème de Rolle (*), Th. des accroissements finis (*), Inégalités des accroissements finis.
- Obtention de la dérivabilité par limite de la dérivée.
- Sens de variations pour une fonction dérivable sur un intervalle et cas de la stricte monotonie.

## NOUVEAU COURS :

### • Dérivation des fonctions à valeurs réelles

**V – Fonctions convexes**

- Paramétrage d'un segment, définition d'une fonction convexe/concave
- Position de la courbe représentatives par rapports à ses cordes
- Cas des fonctions dérivables, position de la courbe représentative par rapport à ses tangentes
- Cas des fonctions deux fois dérivable
- Inégalités classiques de convexité :

$$\forall u \in ]-1, +\infty[, \ln(1+u) \le u \qquad \forall x \in \mathbb{R}, e^x \ge 1 + x. \qquad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x.$$

**VI – Extension aux fonctions à valeurs complexes**

⚠ Les th. de Rolle et des accroissements finis ne s'étendent pas aux fonctions à valeurs complexes.

⚠ Rq. pour les interrogateurs :
Les suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ n'ont pas encore été vue en classe

### • Systèmes linéaires – Méthode du pivot

Rq pour les interrogateurs : le but de ce chapitre est de savoir appliquer l'algorithme de Gauss sur des systèmes de taille raisonnable, avec ou sans paramètre.

**I – Généralités**

- Équation linéaire, systèmes linéaires, système homogène, compatible/incompatible, système de Cramer.
- Forme de l'ensemble des solutions
- Interprétation géométrique dans le cas de systèmes à deux ou trois équations ou deux ou trois inconnues.

**II – Méthode du pivot**

- Définition des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire
- Si on applique à un système linéaire (S) une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on obtient un autre système linéaire (S') équivalent à (S), c'est-à-dire ayant le même ensemble de solutions.
- Systèmes échelonnés : définition, pivot, rang du système, relations de compatibilités
- Algorithme de Gauss

### • Calcul matriciel

**I – Matrices à coefficients dans K**

- Définition, opérations : somme, multiplication par un scalaire, propriétés de calcul, combinaison linéaire.
- Décomposition comme combinaison linéaire des matrices élémentaires.
- Transposition, notation $A^T$.

**II – Produit de matrices**

- Définition, propriétés de calcul. Le produit matriciel N'EST PAS COMMUTATIF.
- Lignes et colonnes d'une matrice :
  - Si X est une matrice colonne alors AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
  - $C_j(AB) = A \times C_j(B)$ et $L_i(AB) = L_i(A) \times B$.
- Écriture matricielle d'un système linéaire

**III - Les matrices carrées**

- Définition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit matriciel est une loi interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Définition d'une puissance entière de matrice, propriétés.
- **Si A et B commutent**, on peut utiliser : Le binôme de Newton et la formule de Bernoulli $A^n - B^n = \dots$

Exemples : Calcul de $J^k$ où $J = (1)_{1 \le i, j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*) Calcul de $A^k$ où $A = \begin{pmatrix} 5 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*)

- Matrices carrées particulières : diagonales, scalaires, triangulaires, symétriques et antisymétriques

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure et expression des coefficients diagonaux. (*)

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 18 : Calcul matriciel (fin)

**Déroulement d'une colle**

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Ex(s) de calcul : Calcul d'une dérivée n-ième
   Ou/et Résolution d'un système linéaire (avec ou sans paramètre, de taille raisonnable) en utilisant l'algorithme de Gauss
   Ou/et Calcul des puissances entières d'une matrice carrée d'ordre 3
3. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

## Semaine de colles n°17 du 26/02/24 au 01/03/24 - Exercices à savoir refaire

### Exercices Chap. 14

**Exercice 2 :**

**1.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\dfrac{x f(a) - a f(x)}{x-a}$ quand $x$ tend vers $a$.

**2.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ quand $h$ tend vers 0.

**Exercice 10 :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, si elle existe, la dérivée $n^{\text{ième}}$ des fonctions suivantes :

**1.** $f : x \longmapsto (x^2+1)e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ **2.** $f : x \longmapsto \sin x\, e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

**4.** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1/3\}$ **5.** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$

**Exercice 12 :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f_n : x \longmapsto x^{n-1} \ln x$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $\forall\, x > 0,\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

**Exercice 13 :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f : x \longmapsto x^n(1+x)^n$ définie sur $\mathbb{R}$.

**1.** En utilisant la formule de Leibniz, déterminer, après avoir justifié son existence, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f$.

**2.** En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer, une autre expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f$.

**3.** En déduire la valeur de : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

**Exercice 18 :** *Généralisation du théorème de Rolle sur un intervalle non borné.*

Soit $a$ un réel et $f$ une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$.

Montrer que si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$ alors il existe un réel $c$ dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

*Ind. Utiliser la fonction* $g : t \longmapsto f\left(\dfrac{1}{t} + a - 1\right)$ *définie sur* $]0, 1]$.

**Exercice 21 :**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a+2h]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

Montrer que : $\exists\, c \in\ ]a, a+2h[,\ f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c)$.

*<u>Ind</u>. On pourra introduire :* $\varphi : x \longmapsto f(x+h) - f(x)$.

**Exercice 26 :** *Formule de Taylor Lagrange à l'ordre* 2.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$. Montrer que : $\exists\, c \in\ ]a, b[,\ f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2} f''(c)$.

**Exercice 29 :** ***Inégalités de convexité.***

**1.** Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \geq -1, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

**2.** On considère $p$ et $q$ deux réels, strictement supérieurs à 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que : $\forall\, (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ xy \leq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$.

**3. a.** Montrer que $f : ]1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -\ln(\ln x)$ est convexe sur son ensemble de définition.

**b.** En déduire que : $\forall\, (x, y) \in\ ]1, +\infty[^2,\ \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

### Exercices Chap. 16

• <u>A connaitre :</u> Si $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$ alors on a : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ J^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ n^{k-1} J & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ (à savoir démontrer)

Si $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ alors on a : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = \operatorname{diag}(\alpha_1^{\,p}, \ldots, \alpha_n^{\,p})$

• <u>Utilisation d'un raisonnement par récurrence</u>

Mth : On calcule $A^2, A^3, \ldots$.
On conjecture l'expression de $A^n$ en fonction de $n$.
On démontre proprement cette conjecture par récurrence.

• <u>Utilisation de suites récurrentes</u>

Mth : $\boxed{\text{SI}}$ $A^2$ s'écrit comme combinaison linéaire de A et $I_3$, on peut :

1) Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = u_n A + v_n I_3$
2) Calculer $u_n$ et $v_n$ en fonction $n$ et en déduire une expression de $A^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

• <u>Utilisation du binôme de Newton</u>

Mth : On cherche à écrire A sous la forme A = M + N avec M et N qui **COMMUTENT** et telles que l'on sache calculer leurs puissances successives.
Une des deux matrices est souvent $\alpha I_n$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ car $\alpha\, I_n$ commute avec toutes matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 2 :**

Soit $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général égal à 1.

Montrer que : $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $J A J = s(A) J$ où $s(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ est la somme de tous les termes de A.

**Exercice 5 :**

**1.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer $A^2$ comme combinaison linéaire de A et $I_3$.

**2.** Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = u_n A + v_n I_3$.

**3.** Calculer $u_n$ et $v_n$ en fonction $n$ et en déduire une expression de $A^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 7 :**

**1.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - I_3$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $B^n$ et en déduire l'expression de $A^n$.

**Exercice 12 :**

Soit $(x_n)$, $(y_n)$ et $(z_n)$ trois suites réelles définies par leurs premiers termes $x_0$, $y_0$ et $z_0$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{6}y_n + \dfrac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{6}x_n + \dfrac{2}{3}y_n + \dfrac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{6}x_n + \dfrac{1}{6}y_n + \dfrac{2}{3}z_n \end{cases}$$

Déterminer $x_n$, $y_n$ et $z_n$ en fonction de $n$, $x_0$, $y_0$ et $z_0$, puis étudier la convergence de ces trois suites.

**Exercice 37 :**

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Est-ce que cette écriture est unique ?