Semaine de colles n°18 du 04/03/24 au 08/03/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Systèmes linéaires – Méthode du pivot

Rq pour les interrogateurs : le but de ce chapitre est de savoir appliquer l'algorithme de Gauss sur des systèmes de taille raisonnable, avec ou sans paramètre.

I – Généralités

- Équation linéaire, systèmes linéaires, système homogène, compatible/incompatible, système de Cramer.
- Forme de l'ensemble des solutions
- Interprétation géométrique dans le cas de systèmes à deux ou trois équations ou deux ou trois inconnues.

II – Méthode du pivot

- Définition des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire
- Si on applique à un système linéaire (S) une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on obtient un autre système linéaire (S') équivalent à (S), c'est-à-dire ayant le même ensemble de solutions.
- Systèmes échelonnés : définition, pivot, rang du système, relations de compatibilité
- Algorithme de Gauss

• Calcul matriciel

I – Matrices à coefficients dans K

- Définition, opérations : somme, multiplication par un scalaire, propriétés de calcul, combinaison linéaire.
- Décomposition comme combinaison linéaire des matrices élémentaires.
- Transposition, notation A^T.

II – Produit de matrices

- Définition, propriétés de calcul. Le produit matriciel N'EST PAS COMMUTATIF.
- Lignes et colonnes d'une matrice :
  - Si X est une matrice colonne alors AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
  - $C_j(AB) = A \times C_j(B)$ et $L_i(AB) = L_i(A) \times B$.
- Écriture matricielle d'un système linéaire

III - Les matrices carrées

- Définition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit matriciel est une loi interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Définition d'une puissance entière de matrice, propriétés.
- **Si A et B commutent,** on peut utiliser : Le binôme de Newton et la formule de Bernoulli $A^n - B^n = \ldots$

Exemples : Calcul de J^k où $J = (1)_{1 \le i, j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **(*)** Calcul de A^k où $A = \begin{pmatrix} 5 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **(*)**

- Matrices carrées particulières : diagonales, scalaires, triangulaires, symétriques et antisymétriques

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure et expression des coefficients diagonaux. **(*)**

NOUVEAU COURS :

• Calcul matriciel

IV - Matrices carrées inversibles

- Définition, cas des matrices ayant une ligne/colonne nulle, cas des matrices diagonales.
- Inverse d'un produit, d'une transposée, d'une puissance entière

V – Opérations élémentaires sur les matrices

- Opérations élémentaires sur les lignes : permutation, dilatation, transvection.
- Matrices des O.E.L, interprétation en termes de produits matriciels.
- Matrices des O.E.L sont inversibles, les O.E.L. préservent l'inversibilité
- Cas des matrices ayant deux lignes/colonnes proportionnelles
- Opérations élémentaires sur les colonnes

VI – Algorithme du pivot de Gauss et caractérisations des matrices inversibles

- Si A est inversible, l'algorithme du pivot de Gauss permet, par une suite finie d'O.E.L., de transformer A en une matrice ayant n pivots / en I_n.
- Caractérisation des matrices inversibles :

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :
>
> **1.** A est inversible.
>
> **2.** $\exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $BA = I_n$
>
> **3.** Le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution (c'est la solution nulle).
>
> **4.** Il existe une suite finie O.E.L. permettant de transformer A en une matrice ayant n pivots.
>
> **5.** Il existe une suite finie O.E.L permettant de transformer A en I_n.

- Invisibilité à droite et à gauche
- Calcul pratique de l'inverse en utilisant l'algorithme de Gauss :

Si A est inversible, il existe une suite finie d'O.E.L. qui transforme A en I_n. La même suite d'O.E.L. transforme I_n en A^{-1}. Idem avec OEL mais on ne mélange pas les deux.

- Calcul pratique de l'inverse par résolution de système linéaire :

A est inversible $\Leftrightarrow$ Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ a une unique solution (qui est alors $X = A^{-1}B$)

• Compléments de cours : suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

I - Généralités

- Si I intervalle $\mathbb{R}$ stable par f alors le système $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ définit une unique suite (u_n).
- Valeurs éventuelles de la limite si f continue sur I (point(s) fixe(s) de f).

II – Cas d'une fonction contractante

- Définition fonction contractante (k-lipschitzienne avec 0 < k < 1), unicité du point fixe (s'il existe) et convergence de (u_n). Cette propriété est à redémontrer **proprement** à chaque utilisation.
- Utilisation l'inégalité des accroissements finis pour montrer qu'une fonction est contractante.

III – Cas d'une fonction monotone

- Si f est croissante alors (u_n) est monotone.
- Si f est décroissante alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 19 : Espaces vectoriels (début)

Déroulement d'une colle

1. Éventuellement : une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Calcul(s) :
   Résolution d'un système linéaire (avec ou sans paramètre, de taille raisonnable) en utilisant l'algorithme de Gauss
   Ou/et Calcul des puissances entières d'une matrice carrée d'ordre 3
   OU/Et Calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3
3. Exercice(s) au choix de l'interrogateur. La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°18 du 04/03/24 au 08/03/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 16

Méthodes à connaitre :

★Comment calculer les puissances d'une matrice A ?

• A connaitre : Si $J = (1)_{1 \le i, j \le n}$ alors on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ J^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ n^{k-1}J & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Si $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors on a : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = \text{diag}(\alpha_1{}^p, \dots, \alpha_n{}^p)$

• Utilisation d'un raisonnement par récurrence : Calcul des 1ieres puissances, conjecture, démonstration par récurrence

• Utilisation de suites récurrentes

Mth : $\boxed{\text{SI}}$ A^2 s'écrit comme combinaison linéaire de A et I_3, on peut :

1) Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = u_n A + v_n I_3$
2) Calculer u_n et v_n en fonction n et en déduire une expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

• Utilisation du binôme de Newton

Mth : A = M + N avec M et N qui **COMMUTENT** et on sait calculer leurs puissances
Une des deux matrices est souvent αI_n avec $\alpha \in \mathbb{K}$ car αI_n commute avec toutes matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

★ Comment montrer que A est inversible (sans calculer son inverse) ?

Rq. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comportant une ligne ou une colonne nulle n'est pas inversible.
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant deux lignes ou deux colonnes proportionnelles n'est pas inversible.

Mth : Dans la pratique, pour montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est inversible, **il suffit** de montrer qu'il existe une suite finie O.E.L. permettant de transformer A en une matrice ayant ***n* pivots**.

Mth : Pour montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est inversible, **il suffit** de montrer que le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution (qui est la solution nulle)

★ Comment montrer que A est inversible et calculer A^{-1} ?

• Utilisation d'une relation en I, A, A^2 : On se ramène à une égalité de la forme : $A \times (\underbrace{\dots}_{A^{-1}}) = I_n$

• Utilisation d'OEL (ou O.E.C) pour montrer qu'il existe une suite finie O.E.L permettant de transformer A en I_n. La même suite d'O.E.L. transforme I_n en A^{-1}

• Résolution d'un système linéaire : A est inversible $\Leftrightarrow$ Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système AX = B a une unique solution.
Cette solution est alors : $X = A^{-1}B$

Exercice 2 :
Soit $J = (1)_{1 \le i, j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général égal à 1.

Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $JAJ = s(A)J$ où $s(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ est la somme de tous les termes de A.

Exercice 12 :
Soit (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites réelles définies par leurs premiers termes x_0, y_0 et z_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n \end{cases}$$

Déterminer x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0, puis étudier la convergence de ces trois suites.

Exercice 20 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente ($\exists p \in \mathbb{N},\ A^p = 0_n$). Montrer que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 29 :
Soit A = … et P = … .
1. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
2. On pose : $D = P^{-1}AP$. Déterminer D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Application à un système de suites récurrentes.

Exercice 33 :
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, MA = AM.
Ind. Quel est l'effet de la multiplication à droite ou à gauche de M par $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 37 :
Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Est-ce que cette écriture est unique ?

Exercices Chap. 14 – Bis - Suites récurrentes

Exercice 2 : Étudier, selon la valeur de u_0, la nature des suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n} \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 \ge 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{4}u_n{}^2 \end{cases}$