Semaine de colles n°19 du 11/03/24 au 15/03/24

Du programme précédent :

• Calcul matriciel

I – Matrices à coefficients dans K

II – Produit de matrices

III - Les matrices carrées

IV - Matrices carrées inversibles

- Définition, cas des matrices ayant une ligne/colonne nulle, cas des matrices diagonales.
- Inverse d'un produit, d'une transposée, d'une puissance entière

V – Opérations élémentaires sur les matrices

- Opérations élémentaires sur les lignes : permutation, dilatation, transvection.
- Matrices des O.E.L, interprétation en termes de produits matriciels.
- Matrices des O.E.L sont inversibles, les O.E.L. préservent l'inversibilité
- Cas des matrices ayant deux lignes/colonnes proportionnelles
- Opérations élémentaires sur les colonnes

VI – Algorithme du pivot de Gauss et caractérisations des matrices inversibles

- Si A est inversible, l'algorithme du pivot de Gauss permet, par une suite finie d'O.E.L., de transformer A en une matrice ayant n pivots / en I_n.
- Caractérisation des matrices inversibles :

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :
> 1. A est inversible.
> 2. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $BA = I_n$
> 3. Le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution (c'est la solution nulle).
> 4. Il existe une suite finie O.E.L. permettant de transformer A en une matrice ayant n pivots.
> 5. Il existe une suite finie O.E.L permettant de transformer A en I_n.

- Inversibilité à droite et à gauche
- Calcul pratique de l'inverse en utilisant l'algorithme de Gauss :

Si A est inversible, il existe une suite finie d'O.E.L. qui transforme A en I_n. La même suite d'O.E.L. transforme I_n en A^{-1}. Idem avec OEL mais on ne mélange pas les deux.

- Calcul pratique de l'inverse par résolution de système linéaire :

A est inversible $\Leftrightarrow$ Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ a une unique solution (qui est alors $X = A^{-1}B$)

• Compléments de cours : suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

I – Généralités

- Si I intervalle $\mathbb{R}$ stable par f alors le système $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ définit une unique suite (u_n).
- Valeurs éventuelles de la limite si f continue sur I (point(s) fixe(s) de f).

II – Cas d'une fonction contractante

- Définition fonction contractante (k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$), unicité du point fixe (s'il existe) et convergence de (u_n). Cette propriété est à redémontrer **proprement** à chaque utilisation.
- Utilisation l'inégalité des accroissements finis pour montrer qu'une fonction est contractante.

III – Cas d'une fonction monotone

- Si f est croissante alors (u_n) est monotone.
- Si f est décroissante alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires.

Nouveau cours :

• Espaces vectoriels et familles de vecteurs

I – Espace vectoriel sur K

- Définition d'un $\mathbb{K}$-ev où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, unicité de O_E et de l'opposé d'un vecteur.

Ex. de ref. Ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X, E)$ où E ev, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- Le produit cartésien d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-ev est un $\mathbb{K}$-ev.

  Ex. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev.

- Règles de calcul dans les espaces vectoriels.
- Définition d'une combinaison linéaire, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires, les ev. sont stables par combinaison linéaire.

II – Sous-espaces vectoriels

- Définition, caractérisation et exemples de sev des ev de références.
- Définition du sev. engendré par une famille finie de vecteurs, l'espace Vect(x_1, …, x_n) est, au sens de l'inclusion, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs x_1, … et x_n.
- Toute intersection de sev est un sev.
- Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe et caractérisations.
- Cas des sous-espaces supplémentaires, notation $E = F \oplus G$, caractérisations.

Ex. fait dans le cours :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0\}$ et $G = \text{vect}((1, 1, 1))$ sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. **(*)**

À savoir démontrer (cf. chapitres précédents) **(*)**

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- L'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sev supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 20 : Espaces vectoriels (fin : famille de vecteurs)

Déroulement d'une colle

1. Montrer sur un exemple que F est un sev de E (en utilisant une caractérisation des sev ou en l'écrivant comme sous espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs)
   Ou Une question signalée par (*)
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur. La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°19 du 11/03/24 au 15/03/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 16

Méthodes à connaitre :

★**Comment calculer les puissances d'une matrice A ?**

• A connaitre : Si $J = (1)_{1 \leq i,\, j \leq n}$ alors on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ J^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ n^{k-1}J & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Si $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors on a : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = \text{diag}(\alpha_1{}^p, \dots, \alpha_n{}^p)$

• Utilisation d'un raisonnement par récurrence : Calcul des 1ieres puissances, conjecture, démonstration par récurrence

• Utilisation de suites récurrentes

Mth : $\boxed{\text{SI}}$ A^2 s'écrit comme combinaison linéaire de A et I_3, on peut :

1) Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = u_n A + v_n I_3$
2) Calculer u_n et v_n en fonction n et en déduire une expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

• Utilisation du binôme de Newton

Mth : A = M + N avec M et N qui **COMMUTENT** et on sait calculer leurs puissances
Une des deux matrices est souvent αI_n avec $\alpha \in \mathbb{K}$ car αI_n commute avec toutes matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

★ **Comment montrer que A est inversible (sans calculer son inverse)** ?

Rq. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comportant une ligne ou une colonne nulle n'est pas inversible.
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant deux lignes ou deux colonnes proportionnelles n'est pas inversible.

Mth : Dans la pratique, pour montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est inversible, **il suffit** de montrer qu'il existe une suite finie O.E.L. permettant de transformer A en une matrice ayant ***n*** **pivots**.

Mth : Pour montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est inversible, **il suffit** de montrer que le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution (qui est la solution nulle)

★ **Comment montrer que A est inversible et calculer A^{-1} ?**

• Utilisation d'une relation en I, A, A^2 : On se ramène à une égalité de la forme : $A \times (\underbrace{\dots}_{A^{-1}}) = I_n$

• Utilisation d'OEL (ou O.E.C) pour montrer qu'il existe une suite finie O.E.L permettant de transformer A en I_n. La même suite d'O.E.L. transforme I_n en A^{-1}

• Résolution d'un système linéaire : A est inversible ⇔ Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système AX = B a une unique solution.
Cette solution est alors : $X = A^{-1}B$

Exercice 12 :
Soit (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites réelles définies par leurs premiers termes x_0, y_0 et z_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n \end{cases}$$

Déterminer x_n , y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0, puis étudier la convergence de ces trois suites.

Exercice 20 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente ($\exists\, p \in \mathbb{N},\ A^p = 0_n$). Montrer que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 29 :
Soit A = … et P = … .
1. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
2. On pose : $D = P^{-1}A\,P$. Déterminer D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Application à un système de suites récurrentes.

Exercice 33 :
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, MA = AM.
Ind. Quel est l'effet de la multiplication à droite ou à gauche de M par $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 37 :
Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Est-ce que cette écriture est unique ?

Exercices Chap. 14 – Bis - Suites récurrentes

Exercice 2 : Étudier, selon la valeur de u_0, la nature des suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n} \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{4}u_n{}^2 \end{cases}$

Exercices Chap. 17

Exercice 3 :
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? *Justifier votre réponse.*
1. $A = \{(x, x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
2. $B = \{(x, y, z),\ x^2 - y^2 = 0\}$.
3. $C = \{(x, y, z),\ x + y = 0 \text{ et } x + 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 4 :
Soit $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F \cap G$.

Exercice 8 :
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $E = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 12 :
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E espace vectoriel.
1. A-t-on $F \cup G$ sous espace vectoriel de E ?
2. Montrer que : $F \cup G$ sous espace vectoriel de E ⇔ $F \subset G$ ou $G \subset F$

Exercice 15 :
On considère : $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0 \}$ et $G = \text{Vect}((1, 2, 2))$. Montrer que : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 17 :
Soit $F = \{ f$ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0 \}$ et $G = \{x \longmapsto ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
Montrer que F et G sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.