Semaine de colles n°20 du 18/03/24 au 22/03/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Espaces vectoriels et familles de vecteurs

I – Espace vectoriel sur K

- Définition d'un $\mathbb{K}$-ev où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, unicité de O_E et de l'opposé d'un vecteur.

Ex. de ref. Ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}$(X, E) où E ev, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- Le produit cartésien d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-ev est un $\mathbb{K}$-ev.

Ex. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev.

- Règles de calcul dans les espaces vectoriels.
- Définition d'une combinaison linéaire, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires, les ev. sont stables par combinaison linéaire.

II – Sous-espaces vectoriels

- Définition, caractérisation et exemples de sev des ev de références.
- Définition du sev. engendré par une famille finie de vecteurs, l'espace Vect(x_1, …, x_n) est, au sens de l'inclusion, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs x_1, … et x_n.
- Toute intersection de sev est un sev.
- Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe et caractérisations.
- Cas des sous-espaces supplémentaires, notation E = F⊕ G, caractérisations.

Ex. fait dans le cours :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0\} \text{ et } G = \text{vect}((1, 1, 1)) \text{ sont deux sev supplémentaires de } \mathbb{R}^3.$$ **(*)**

À savoir démontrer (cf. chapitres précédents) **(*)**

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- L'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sev supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

NOUVEAU COURS :

III – Familles de vecteurs

- Familles génératrices de F sev de E : e.v. de dimension finie (existence d'une famille génératrice finie).
  Ajout et suppression de vecteurs dans une famille génératrice de F.
- Familles libres/liées :
  Définition, caractérisation d'une famille libre par décomposition unique des vecteurs de Vect$((x_i)_{1\le i\le n})$
  Caractérisation des familles liées : l'un au moins des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
  Famille libre à 1 ou 2 éléments, famille contenant 0_E, contenant deux vecteurs colinéaires, ...
- Si la famille (x_1, x_2, ... , x_n) est libre alors pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, Vect(x_1, x_2, ... , x_k) et Vect(x_{k+1}, ... , x_n) sont en somme directe.
- Dans un espace vectoriel de dimension finie, le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice du même espace.

IV – Bases et dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

- Bases d'un espace vectoriel : définition, caractérisation par existence et unicité de la décomposition, coordonnées dans une base.

Ex. Déterminer une base d'ev tels que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 2y + z = 0\}$ ou/et $\{(a - b, a + 2b, b - a), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ **(*)**

- Caractérisation d'une base comme famille libre maximale ou génératrice minimale.
- Soit F, G sev de E, de bases respectives B_1 et B_2.
  On a : E = F⊕ G ⇔ B = (B_1, B_2) base de E (base adaptée à la somme directe)
- Existence de bases : Th. de la base extraite, th. de la base incomplète.
- Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, exemples : $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et leur base canonique.
- Dimension et base d'un produit cartésien d'espaces vectoriels de dimensions finies.
- Si E de dimension n alors : Toute famille libre de E est finie et a **au plus** n éléments
  Et toute famille libre de E de n éléments est une base de E.
- Si E de dimension n alors : Toute famille génératrice de E a **au moins** n éléments
  Et toute famille génératrice de E de n éléments est une base de E.

V – Sous-espaces vectoriels en dimension finie

- Dimension d'un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Existence de sous-espace supplémentaire d'un sev donné, dimension d'un supplémentaire.
- Formule de Grassmann **(*)**
- Caractérisation de s.e.v. supplémentaires dans un e.v. de dimension finie.

Rq. pour les interrogateurs : Nous n'avons pas encore vu la notion de rang d'une famille de vecteurs

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 21 : Rang d'une famille de vecteurs + Polynômes (début)

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*) ou une question très proche.
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur. La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°20 du 18/03/24 au 22/03/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 17

Exercice 3 :
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? *Justifier votre réponse.*
1. $A = \{(x, x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
2. $B = \{(x, y, z), x^2 - y^2 = 0\}$.
3. $C = \{(x, y, z), x + y = 0 \text{ et } x + 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 4 :
Soit $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F \cap G$.

Exercice 8 :
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $E = \{M \in M_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 12 :
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E espace vectoriel.
1. A-t-on $F \cup G$ sous espace vectoriel de E ?
2. Montrer que : $F \cup G$ sous espace vectoriel de E $\Leftrightarrow$ $F \subset G$ ou $G \subset F$

Exercice 15 :
On considère : $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0 \}$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 2, 2))$. Montrer que : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 17 :
Soit $F = \{ f$ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0 \}$ et $G = \{x \longmapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
Montrer que F et G sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.

Exercice 19 :
Les vecteurs suivants forment-ils une famille libre ou liée ?
1. $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, -1, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, -1, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $f : x \longmapsto \cos^2 x$, $g : x \longmapsto \cos(2x)$ et $h : x \longmapsto 1$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. $f : x \longmapsto x$, $g : x \longmapsto e^x$ et $h : x \longmapsto xe^x$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
5. (u_n) et (v_n) avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ et $v_n = n2^n$, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 23 :
Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ n réels tels que : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on définit $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = |x - x_k|$.
Montrer que $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre dans $C(\mathbb{R})$.

Exercice 28 :
On considère $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-1, -1, 2)$ et $\vec{w} = (-2, 1, 2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Quelles sont les coordonnées de $\vec{x} = (1, 1, 1)$ dans cette base ?

Exercice 34 :
Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose : $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y - z = 0 \text{ et } 3x - 2y + 2z = 0\}$ et $G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x + y - 2z = 0 \}$
1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Déterminer sa dimension.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Déterminer sa dimension.
3. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 36 :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.
On appelle ***hyperplan*** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.
1. On considère H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Montrer que : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.
2. Soit H un hyperplan de E et $u \in E$ tel que $u \notin H$. Montrer que H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.