Semaine de colles n°21 du 25/03/24 au 29/03/24

Du programme précédent :

• Espaces vectoriels et familles de vecteurs

I – Espace vectoriel sur K

II – Sous-espaces vectoriels

III – Familles de vecteurs

- Familles génératrices de F sev de E : e.v. de dimension finie (existence d'une famille génératrice finie).
  Ajout et suppression de vecteurs dans une famille génératrice de F.
- Familles libres/liées :
  Définition, caractérisation d'une famille libre par décomposition unique des vecteurs de Vect($(x_i)_{1\le i\le n}$)
  Caractérisation des familles liées : l'un au moins des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
  Famille libre à 1 ou 2 éléments, famille contenant 0_E, contenant deux vecteurs colinéaires, ...
- Si la famille ($x_1, x_2, \dots, x_n$) est libre alors pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, Vect($x_1, x_2, \dots, x_k$) et Vect($x_{k+1}, \dots, x_n$) sont en somme directe.
- Dans un espace vectoriel de dimension finie, le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice du même espace.

IV – Bases et dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

- Bases d'un espace vectoriel : définition, caractérisation par existence et unicité de la décomposition, coordonnées dans une base.
- Caractérisation d'une base comme famille libre maximale ou génératrice minimale.
- Soit F, G sev de E, de bases respectives B_1 et B_2.
  On a : E = F⊕ G ⇔ B = (B_1, B_2) base de E (base adaptée à la somme directe)
- Existence de bases : Th. de la base extraite, th. de la base incomplète.
- Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, exemples : $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et leur base canonique.
- Dimension et base d'un produit cartésien d'espaces vectoriels de dimensions finies.
- Si E de dimension *n* alors : Toute famille libre de E est finie et a **au plus** n éléments
  Et toute famille libre de E de n éléments est une base de E.
- Si E de dimension *n* alors : Toute famille génératrice de E a **au moins** n éléments
  Et toute famille génératrice de E de n éléments est une base de E.

V – Sous-espaces vectoriels en dimension finie

- Dimension d'un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Existence de sous-espace supplémentaire d'un sev donné, dimension d'un supplémentaire.
- Formule de Grassmann **(*)**
- Caractérisation de s.e.v. supplémentaires dans un e.v. de dimension finie.

Nouveau cours :

V – Sous-espaces vectoriels en dimension finie

- Rang d'une famille de vecteurs, caractérisation des familles libres et génératrices à l'aide du rang. **(*)**
- Détermination pratique du rang d'une famille de vecteurs de K^n par la méthode du pivot de Gauss pour se ramener à une famille étagée + Présentation pratique sous forme de matricielle.

• Polynômes

I – L'ensemble K [X] où K = ℝ ou ℂ

- Définition formelle, degré, coefficient dominant, polynômes unitaires.
- Opérations sur l'ensemble des polynômes : structure d'ev., multiplication de deux polynômes
  Formule du binôme de Newton et formule de Bernoulli.
- Notation usuelle des polynômes.
- $K_n[X]$ sev. de K[X] de base canonique (1, X, … , X^n).
- Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre. **(*)**
- Composition de deux polynômes.
- Fonction polynomiale associée à un polynôme.

II – Dérivation dans K[X]

- Définition, propriétés, expression de la dérivé $k^{\text{ième}}$ d'un polynôme.
- Formule de Leibniz et formule de Taylor pour les polynômes.

III – Divisibilité dans K[X]

- Multiples et diviseurs d'un polynôme, division euclidienne, exemple pratique.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 22 : Polynômes (fin)

Déroulement d'une colle

1. Énoncé d'une définition/prop.
2. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
3. Exercice(s) au choix de l'interrogateur. La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°21 du 25/03/24 au 29/03/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 17

Exercice 19 :
Les vecteurs suivants forment-ils une famille libre ou liée ?
1. $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, -1, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, -1, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $f : x \longmapsto \cos^2 x$, $g : x \longmapsto \cos(2x)$ et $h : x \longmapsto 1$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. $f : x \longmapsto x$, $g : x \longmapsto e^x$ et $h : x \longmapsto xe^x$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
5. (u_n) et (v_n) avec : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$ et $v_n = n2^n$, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 23 :
Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n réels tels que : $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on définit $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = |x - x_k|$.
Montrer que $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est libre dans $C(\mathbb{R})$.

Exercice 28 :
On considère $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-1, -1, 2)$ et $\vec{w} = (-2, 1, 2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Quelles sont les coordonnées de $\vec{x} = (1, 1, 1)$ dans cette base ?

Exercice 34 :
Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose : $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y - z = 0 \text{ et } 3x - 2y + 2z = 0\}$ et $G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 4x + y - 2z = 0 \}$
1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Déterminer sa dimension.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Déterminer sa dimension.
3. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 36 :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.
On appelle <u>*hyperplan*</u> de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.
1. On considère H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Montrer que : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.
2. Soit H un hyperplan de E et $u \in E$ tel que $u \notin H$. Montrer que H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 37 :
2. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose : $\vec{u} = (a, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, a, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ suivant les valeurs de a.

Exercice 39 :
Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (x \longmapsto e^x, x \longmapsto e^{-x}, x \longmapsto \operatorname{ch} x, x \longmapsto \operatorname{sh} x)$ dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercices Chap. 18

Exercice 3 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P_n = (X^2 + 1)^{2n} - (X^2 - 1)^{2n}$.

Exercice 4 :
Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 7 :
On considère les ensembles : $E_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ \tilde{P}(2) = 0 \}$ et $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \tilde{P}'(1) = 1 \}$.
Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?
Si oui, sont-ils de dimensions finies ? Si oui, en donner une base.

Exercice 8 :
Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$. On considère : $F = \{P \in E,\ P(1) = P'(0) = P(-1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(X^2, X(X + 1), (X + 1)^2)$.
1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Donner une base de F et une base de G.
2. A-t-on $E = F \oplus G$?

Exercice 15 :
Déterminer le reste des divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[X]$:
1. $A = X^n$ par $B = X^2 - 3X + 2$ avec $n \geq 2$
2. $A = X^n$ par $B = X(X - 1)^2$ avec $n \geq 3$
3. $A = (X \cos \theta + \sin \theta)^n$ par $B = X^2 + 1$ avec $n \geq 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 :
Soit $n \geq 1$et $P = n\, X^{n+1} - (n + 1)aX^n + a^{n+1}$ où a est un réel fixé. Montrer que P est divisible par $(X - a)^2$ et donner le quotient.

Exercice 23 : *Une application aux matrices.*
On considère : $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire, A^n pour $n \geq 2$.