

Semaine de colles n°22 du 01/04/24 au 05/04/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• **Espaces vectoriels et familles de vecteurs****I - Espace vectoriel sur K** **II - Sous-espaces vectoriels****III - Familles de vecteurs****IV - Bases et dimension d'un espace vectoriel de dimension finie****V - Sous-espaces vectoriels en dimension finie**

- ➔ Dimension d'un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- ➔ Existence de sous-espace supplémentaire d'un sev donné, dimension d'un supplémentaire.
- ➔ Formule de Grassmann
- ➔ Caractérisation de s.e.v. supplémentaires dans un e.v. de dimension finie.
- ➔ Rang d'une famille de vecteurs, caractérisation des familles libres et génératrices à l'aide du rang. (*)
- ➔ Détermination pratique du rang d'une famille de vecteurs de K^n par la méthode du pivot de Gauss pour se ramener à une famille étagée + Présentation pratique sous forme de matricielle.

• **Polynômes****I - L'ensemble $K[X]$ où $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}**

- ➔ Définition formelle, degré, coefficient dominant, polynômes unitaires.
- ➔ Opérations sur l'ensemble des polynômes : structure d'ev., multiplication de deux polynômes
Formule du binôme de Newton et formule de Bernoulli.
- ➔ Notation usuelle des polynômes.
- ➔ $K_n[X]$ sev. de $K[X]$ de base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.
- ➔ Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre. (*)
- ➔ Composition de deux polynômes.
- ➔ Fonction polynomiale associée à un polynôme.

II - Dérivation dans $K[X]$

- ➔ Définition, propriétés, expression de la dérivé $k^{\text{ième}}$ d'un polynôme.
- ➔ Formule de Leibniz et formule de Taylor pour les polynômes.

III - Divisibilité dans $K[X]$

- ➔ Multiples et diviseurs d'un polynôme, division euclidienne, exemple pratique.

NOUVEAU COURS :• **Polynômes****IV - Racines d'un polynôme**

- ➔ Définition par divisibilité et caractérisation.
- ➔ Tout polynôme de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines distinctes.
Si un polynôme de degré $\leq n$ admet au moins $n + 1$ racines distinctes, c'est le polynôme nul.
- Ex. Trouver tous les polynômes P vérifiant : $P(X+1) = P(X)$. (*)
- ➔ Ordre de multiplicité d'une racine : définition par divisibilité et caractérisation.
- ➔ Un polynôme de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines, comptées avec leur multiplicité.
Si un polynôme de degré $\leq n$ admet au moins $n + 1$ racines, comptées avec leur multiplicité, c'est le polynôme nul.

V - Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

- ➔ Polynômes irréductibles, th. de D'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
- ➔ Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
- ➔ Ex. de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$: $X^n - 1$ (*)

VI - Somme et produit des racines d'un polynôme

- ➔ Savoir retrouver les relations coefficients/racines pour un polynôme de degré 3. (*)
- ➔ Somme et produit des racines d'un polynôme scindé sur \mathbb{K} de degré $n \geq 1$.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 23 : Dénombrement

Déroulement d'une colle

1. Énoncé d'une définition/prop.
2. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
3. Exercice(s) au choix de l'interrogateur. La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraine une note < 10 .

Exercices Chap. 17Exercice 37 :

2. Dans \mathbb{R}^3 , on pose : $\vec{u} = (a, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, a, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ suivant les valeurs de a .

Exercice 39 :

Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}, x \mapsto \operatorname{ch} x, x \mapsto \operatorname{sh} x)$ dans $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercices Chap. 18Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P_n = (X^2 + 1)^{2n} - (X^2 - 1)^{2n}$.

Exercice 4 :

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 7 :

On considère les ensembles : $E_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \tilde{P}(2) = 0\}$ et $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X], \tilde{P}(1) = 1\}$.

Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?

Si oui, sont-ils de dimensions finies ? Si oui, en donner une base.

Exercice 8 :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère : $F = \{P \in E, P(1) = P(0) = P(-1) = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}(X^2, X(X+1), (X+1)^2)$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Donner une base de F et une base de G.

2. A-t-on $E = F \oplus G$?

Exercice 12 :

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x \mapsto \cos^p(x))_{p \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 13 : Polynômes interpolateurs de Lagrange.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $(n+1)$ réels tels que : $a_0 < a_1 < \dots < a_n$.

1. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. Montrer que (L_0, L_1, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

3. On donne A_0, A_1, \dots, A_n $(n+1)$ points d'abscisses 2 à 2 distinctes du plan. Déterminer une fonction polynomiale de degré au plus n dont la courbe représentative passe par les points A_0, A_1, \dots, A_n .

Exercice 15 :

Déterminer le reste des divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $A = X^n$ par $B = X^2 - 3X + 2$ avec $n \geq 2$

2. $A = X^n$ par $B = X(X-1)^2$ avec $n \geq 3$

3. $A = (X \cos \theta + \sin \theta)^n$ par $B = X^2 + 1$ avec $n \geq 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 :

Soit $n \geq 1$ et $P = nX^{n+1} - (n+1)aX^n + a^{n+1}$ où a est un réel fixé. Montrer que P est divisible par $(X-a)^2$ et donner le quotient.

Exercice 23 : Une application aux matrices.

On considère : $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.

2. Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $X^2 - 3X + 2$.

3. En déduire, A^n pour $n \geq 2$.

Exercice 28 :

Montrer que pour tout n entier naturel, le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k$ n'a pas de racine multiple.

Exercice 33 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 2$. On notera \tilde{P} sa fonction polynomiale associée.

1. Montrer que si P est scindé à racines simples sur \mathbb{R} alors il en est de même pour son polynôme dérivé P'.

2. Montrer que si P est scindé sur \mathbb{R} , son polynôme dérivé P' est aussi scindé sur \mathbb{R} .

Exercice 38 :

On considère le polynôme : $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la fonction cotangente définie par : $\cotan : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$.

2. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .

3. Démontrer que P_n admet $n-1$ racines imaginaires pures, deux à deux distinctes. En déduire la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

4. Factoriser P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Problème : Les polynômes de Tchebychev.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$, noté P_n , tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$.

3. a. Calculer P_2, P_3 et P_4 .

b. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n . On demande de démontrer proprement vos résultats !

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de P_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.

On pourra remarquer que : $\forall x \in [-1, 1], \exists ! \theta \in [0, \pi], x = \cos \theta$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien de racines de P_n appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$? Que pouvez-vous en déduire ?

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.