Semaine de colles n°24 du 29/04/24 au 03/05/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

- **Dénombrements**

I – Ensembles finis

- Intervalles de ℕ, conditions sur p et n lorsqu'il existe une injection/surjection/bijection $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.
- Définition d'un ensemble fini non vide et par convention, l'ensemble vide est fini.
- Parties d'un ensemble fini, cardinal d'une partie.
- Applications entre deux ensembles finis : Cardinal de $\mathcal{F}(E, F)$, conditions sur Card E et Card F lorsqu'il existe une injection/surjection/bijection E sur F.

Si E et F finis tels que **Card E = Card F** et $f : E \longrightarrow F$ une application alors :
f injective ⇔ f surjective ⇔ f bijective.

II – Opérations sur les ensembles finis

- Cardinal d'une réunion disjointe ou non, d'un produit cartésien.

Rq. Interrogateurs : La formule du crible est H.P.

- Définition d'une partition d'un ensemble, lien avec les cardinaux.
- Parties d'un ensemble fini : nombre total de parties **(*)** Dem. par récurrence.

III – Outils pour le dénombrement

- p-listes, p-arrangements, permutations.
  Applications : dénombrement des injections et des bijections de E dans F.
- p-combinaisons, nombre de parties de cardinal p d'un ensemble E fini.
- Un exemple classique : les anagrammes **(*)** A savoir expliquer sur des exemples.

IV – Propriétés des coefficients binomiaux

- Démonstrations combinatoires : Symétrie, somme, triangle de Pascal, Binôme de Newton.

NOUVEAU COURS :

- **Probabilités sur un univers fini**

I – Expérience aléatoire, univers et événements

- Définitions, événements élémentaires, événements contraires, événement « A et B », événement « A ou B », Événements incompatibles, système complet d'événements.

II – Probabilités sur un univers fini

- Définition d'une probabilité.
- Probabilité d'une union d'événements deux à deux incompatibles.
- Distribution de probabilité sur Ω, détermination d'une probabilité par les images des événements élémentaires.
- Évènements équiprobables, probabilité uniforme.
- Propriétés d'une probabilité :

Prop.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On a :
1. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(C_A B) = P(A) - P(A \cap B)$
2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. *Croissance.* $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. *Réunion.* $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (*Formule de Poincaré*)

Rq. la formule du crible est HP mais il faut savoir retrouver la formule donnant $P(A \cup B \cup C)$.

III – Probabilités conditionnelles

- Définition d'une probabilité conditionnelle, l'application P_B est une probabilité sur Ω.
- Formule des probabilités composées. **(*)**
- Formule des probabilités totales. **(*)**
- Formule de Bayes

IV – Événements indépendants

- Couple d'événements indépendants, si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- Famille d'événements (mutuellement) indépendants
- Si $n \geq 3$, l'indépendance des A_i deux à deux n'entraine pas leur indépendance (mutuelle).

- **Applications linéaires**

I – Définitions et propriétés de calcul

- Définition, « $f(0_E) = 0_F$ », Exemples et contre-exemples,
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E, composée d'applications linéaires.
- Endomorphismes, itérés, utilisation des formules de Newton et de Bernoulli lorsque deux endomorphismes commutent.
- Isomorphismes (composée, réciproque), automorphismes.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 25 : Applications linéaires.

Déroulement d'une colle

1. Citer une définition / propriété :
   Définition d'un SCE, d'une probabilité, couple/famille d'événements indépendants
   Formule des probabilités composées, de probabilités totales et de Bayes (complètes avec leurs hypothèses !)
2. Éventuellement : une question de cours parmi celles signalées par (*)
3. Déterminer, sur un exemple, si une application est linéaire ou non.
4. Exercice(s) au choix de l'interrogateur. On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°24 du 29/04/24 au 03/05/24- Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 19

Exercice 10 :
Soit E un ensemble à n éléments où $n \geq 1$.
a. Dénombrer les couples (A, B) de parties de E vérifiant : $A \subset B$.
b. Dénombrer les couples (A, B) de parties de E vérifiant : $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.

Exercice 14 : *Formule de Vandermonde.*
Soit n, n_1 et n_2 trois entiers naturels tels que : $n \leq n_1$ et $n \leq n_2$. Montrer de **façon ensembliste** que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}=\binom{n_1+n_2}{n}$.

Exercice 16 : *Applications strictement croissantes.*
Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Exercice 18 : p-listes, p-arrangements ou p-combinaison ?
1. Nombre de codes possibles pour une carte bleue ?
2. Au loto, on tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
3. Au tiercé, une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?
4. Un porte manteau comporte 5 patères. De combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents ?
Rq. Au plus un manteau par patère.
5. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire simultanément 3. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
6. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire successivement 3 sans remise. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
7. Combien de pièces contient un jeu de dominos?
8. Quel est le nombre de façons de choisir 2 délégués dans la classe de PCSI 3 ?
9. Quel est le nombre de façons de choisir 2 délégués dans la classe de PCSI 3 si l'on impose un garçon et une fille ?
10. Quel est le nombre de plaques d'immatriculation possibles ?
Rq. Une plaque d'immatriculation est composée de « 2 lettres – 3 chiffres – 2 lettres »
11. Quel est le nombre de plaques d'immatriculation possibles dont tous les chiffres et les lettres sont deux à deux distincts ?
12. Quel est le nombre d'anagrammes du mot PREPA ?
13. Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?
14. Un QCM, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions qui ont chacune 4 réponses possibles.
De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Exercice 21 :
Combien de mains de 13 cartes peut-on constituer avec un jeu de 52 cartes telles que :
1. elles contiennent exactement un roi ?
2. elles contiennent au moins un roi ?
3. elles contiennent le roi de trèfle et au moins 2 piques ?
4. elles contiennent 6 cartes d'une couleur, 4 cartes d'une autre et 3 cartes d'une troisième ?

Exercice 25 :
Combien y a –t-il de d'entiers dont l'écriture comporte exactement n chiffres ($n \geq 3$) et comportant exactement deux chiffres 8 ?

Exercices Chap. 20

Exercice 4 :
Soit $(N, N_g, n, k) \in (\mathbb{N}^*)^4$. Un commerçant met en vente N tickets dont seulement N_g sont gagnants.
1. Si un joueur achète n billets, quelle est la probabilité d'avoir acheté k billets gagnants ?
2. Si un joueur achète n billets, quelle probabilité d'avoir acheté au moins un billet gagnant ?

Exercice 5 :
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geq 3$. On les tire toutes successivement et sans remise.
1. Déterminer la probabilité qu'on ait tiré 1, 2, 3 dans cet ordre mais pas forcément à la suite.
2. Déterminer la probabilité qu'on ait tiré 1, 2, 3 dans cet ordre et à la suite.
3. Déterminer la probabilité qu'on ait tiré 1, 2, 3 à la suite mais pas nécessairement dans l'ordre.

Exercice 6 :
Un couple a deux enfants dont l'un d'eux (au moins) est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit aussi une fille ?

Exercice 10 :
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue une suite d'épreuves comme suit : lorsqu'on tire une boule d'une certaine couleur, on la remet dans l'urne et on rajoute dans l'urne, k autres boules de la même couleur. On effectue n tirages successifs, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que la probabilité de tirer une boule rouge au n-ième tirage est indépendante de n.

Exercice 11 :
Un automobiliste a le choix entre deux routes A et B pour se rendre à son travail. Le premier jour où il s'y rend, il tire au sort la route qu'il emprunte avec la probabilité 1/2 pour chaque route ; ensuite, s'il est pris dans un embouteillage sur la route empruntée le n-ième jour, il choisit l'autre route le lendemain mais s'il n'est pas pris dans un embouteillage sur la route empruntée le n-ième jour, il choisit la même le lendemain.
On suppose que la probabilité d'être pris dans un embouteillage sur la route A est égale à $a \in]0, 1]$ et sur la route B est $b \in]0, 1]$.
Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité, notée p_n, que l'automobiliste emprunte la route A le n-ième jour.
Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 14 :
Soit $n \geq 2$. On lance n fois une pièce équilibrée, de manière indépendante. On considère les événements :
A_n : « Obtenir au plus un pile »
B_n : « Obtenir au moins un pile et au moins un face »
Démontrer que les événements A_n et B_n sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice 17 :
1. Aladin a devant lui n lampes à huile dont une seule est magique et contient un génie. Comme il ne sait pas dans laquelle il se trouve, il frotte les lampes au hasard les unes après les autres en mettant à l'écart celles qu'il a déjà essayées.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Quelle est la probabilité qu'il trouve le génie au k-ième essai ?
2. Aladin a toujours devant lui n lampes à huile dont une seule est magique… mais il vient d'apercevoir Jasmine et il est tellement distrait qu'il en oublie de mettre de mettre de côté les lampes qu'il a déjà frottées : il les remet avec les lampes non testées !
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Quelle est la probabilité qu'il trouve le génie au k-ième essai ?