Semaine de colles n°25 du 13/05/24 au 17/05/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Probabilités sur un univers fini

I – Expérience aléatoire, univers et événements

- Définitions, événements élémentaires, événements contraires, événement « A et B », événement « A ou B », Événements incompatibles, système complet d'événements.

II – Probabilités sur un univers fini

- Définition d'une probabilité.
- Probabilité d'une union d'événements deux à deux incompatibles.
- Distribution de probabilité sur Ω, détermination d'une probabilité par les images des événements élémentaires.
- Évènements équiprobables, probabilité uniforme.
- Propriétés d'une probabilité :

Prop.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On a :

1. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(C_A B) = P(A) - P(A \cap B)$

2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3. *Croissance.* $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

4. *Réunion.* $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (*Formule de Poincaré*)

Rq. la formule du crible est HP mais il faut savoir retrouver la formule donnant $P(A \cup B \cup C)$.

III – Probabilités conditionnelles

- Définition d'une probabilité conditionnelle, l'application P_B est une probabilité sur Ω.
- Formule des probabilités composées. **(*)**
- Formule des probabilités totales. **(*)**
- Formule de Bayes

IV – Événements indépendants

- Couple d'événements indépendants, si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- Famille d'événements (mutuellement) indépendants
- Si $n \geq 3$, l'indépendance des A_i deux à deux n'entraine pas leur indépendance (mutuelle).

• Applications linéaires

I – Définitions et propriétés de calcul

- Définition, « $f(0_E) = 0_F$ », Exemples et contre-exemples,
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E, composée d'applications linéaires.
- Endomorphismes, itérés, utilisation des formules de Newton et de Bernoulli lorsque deux endomorphismes commutent.
- Isomorphismes (composée, réciproque), automorphismes.

NOUVEAU COURS :

II – Noyau et image d'une application linéaire

- Noyau et image d'une application linéaire, caractérisation application linéaire injective/surjective.
- $f : E \longrightarrow F$ linéaire alors : Ker f sev de E et f injective $\Leftrightarrow$ Ker f = $\{0_E\}$
  Im f sev de F et f surjective $\Leftrightarrow$ Imf = F
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$: • Im (g o f) $\subset$ Im g et Ker f $\subset$ Ker(g o f)
  • $g \circ f = 0 \Leftrightarrow$ Im f $\subset$ Ker g **(*)**
- Équations linéaires : définition et structure de l'ensemble des solutions.
- Formes linéaires et hyperplans : un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Si D droite vectorielle non contenue dans un hyperplan H alors E = H $\oplus$ D, caractérisation en dimension finie.

III – Lien avec les familles de vecteurs

- Image par une application linéaire d'une famille génératrice, d'une famille liée
- Image par une application linéaire **injective** d'une famille libre.
- Définition d'une application linéaire par l'image d'une base :
  Si $(e_1, e_2,.. e_n)$ est une **base** de E et $(y_1, y_2,.. y_n) \in F^n$, alors : $\exists ! f \in \mathcal{L}(E, F), \forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = y_i$

De plus, on a : f injective $\Leftrightarrow$ $(y_1, y_2,.. y_n)$ famille libre dans F
f surjective $\Leftrightarrow$ $(y_1, y_2,.. y_n)$ famille génératrice de F

- Si F et G sev supplémentaires de E, alors une application linéaire définie sur E est entièrement déterminée par ses restrictions à F et G.
- Deux e.v. sont isomorphes ssi ils ont même dimension, tout $\mathbb{K}$-ev de dimension $n > 0$, est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- Si E et F sont deux ev de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à dim E $\times$ dim F.

IV – Introduction aux matrices d'applications linéaires

- Écriture de la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par l'image d'une base de E ou définie explicitement, relativement à des bases données.
- Multiplication d'une matrice par la matrice colonne des **coordonnées** d'un vecteur pour obtenir les **coordonnées** de son image par f. Il faut faire attention aux bases avec lesquelles on travaille.

IV – Applications linéaires en dimension finie

- Rang d'une application linéaire
- Théorème du rang :

Soit E ev. , F ev. quelconque et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Im f est isomorphe à tout supplémentaire de Ker f dans E. **(*)**
Si de plus, E est de **dimension finie** : dim E = dim(Ker f) + rg f = dim(Ker f) + dim(Im f) **(*)**

- Caractérisation des applications linéaires injectives, surjectives, bijectives à l'aide du rang.
- Si **dim E = dim F** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on a : f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective

Si E endomorphisme en dimension finie, f bijective ssi f inversible à droite ou à gauche

- Invariance du rang par composition, à droite ou à gauche, par un isomorphisme.

V – Exemples usuels d'applications linéaires

- Homothéties vectorielles
- Projecteurs : définition, propriétés, caractérisation par idempotence :
  Si p est un endomorphisme idempotent de E (càd p o p = p) alors : **(*)**
  1. $x \in$ Im p $\Leftrightarrow$ p(x) = x
  2. E = Ker p $\oplus$ Im p
  3. p est le projecteur sur Im p parallèlement à Ker p
- Symétries vectorielles : définition, propriétés, caractérisation par involutivité :
  Si s est un endomorphisme involutif de E (càd s o s = Id_E) alors :
  1. E = Ker(s – id_E) $\oplus$ Ker(s + id_E)
  2. s symétrie par rapport à Ker(s – id_E) parallèlement à Ker(s + id_E).

Rq. Nous avons pour l'instant fait peu d'exercices sur ce chapitre

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 26 : Applications linéaires (fin des exercices) + Relation de comparaison pour les fonctions

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10

Semaine de colles n°25 du 13/05/24 au 17/05/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 20

Exercice 4 :
Soit $(N, N_g, n, k) \in (\mathbb{N}^*)^4$. Un commerçant met en vente N tickets dont seulement N_g sont gagnants.
1. Si un joueur achète n billets, quelle est la probabilité d'avoir acheté k billets gagnants ?
2. Si un joueur achète n billets, quelle probabilité d'avoir acheté au moins un billet gagnant ?

Exercice 5 :
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geq 3$. On les tire toutes successivement et sans remise.
1. Déterminer la probabilité qu'on ait tiré 1, 2, 3 dans cet ordre mais pas forcément à la suite.
2. Déterminer la probabilité qu'on ait tiré 1, 2, 3 dans cet ordre et à la suite.
3. Déterminer la probabilité qu'on ait tiré 1, 2, 3 à la suite mais pas nécessairement dans l'ordre.

Exercice 6 :
Un couple a deux enfants dont l'un d'eux (au moins) est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit aussi une fille ?

Exercice 10 :
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue une suite d'épreuves comme suit : lorsqu'on tire une boule d'une certaine couleur, on la remet dans l'urne et on rajoute dans l'urne, k autres boules de la même couleur. On effectue n tirages successifs, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que la probabilité de tirer une boule rouge au n-ième tirage est indépendante de n.

Exercice 11 :
Un automobiliste a le choix entre deux routes A et B pour se rendre à son travail. Le premier jour où il s'y rend, il tire au sort la route qu'il emprunte avec la probabilité 1/2 pour chaque route ; ensuite, s'il est pris dans un embouteillage sur la route empruntée le n-ième jour, il choisit l'autre route le lendemain mais s'il n'est pas pris dans un embouteillage sur la route empruntée le n-ième jour, il choisit la même le lendemain.
On suppose que la probabilité d'être pris dans un embouteillage sur la route A est égale à $a \in \,]0, 1]$ et sur la route B est $b \in \,]0, 1]$.
Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité, notée p_n, que l'automobiliste emprunte la route A le n-ième jour.
Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 14 :
Soit $n \geq 2$. On lance n fois une pièce équilibrée, de manière indépendante. On considère les événements :
A_n : « Obtenir au plus un pile »
B_n : « Obtenir au moins un pile et au moins un face »
Démontrer que les événements A_n et B_n sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice 17 :
1. Aladin a devant lui n lampes à huile dont une seule est magique et contient un génie. Comme il ne sait pas dans laquelle il se trouve, il frotte les lampes au hasard les unes après les autres en mettant à l'écart celles qu'il a déjà essayées.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Quelle est la probabilité qu'il trouve le génie au k-ième essai ?
2. Aladin a toujours devant lui n lampes à huile dont une seule est magique… mais il vient d'apercevoir Jasmine et il est tellement distrait qu'il en oublie de mettre de mettre de côté les lampes qu'il a déjà frottées : il les remet avec les lampes non testées !
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Quelle est la probabilité qu'il trouve le génie au k-ième essai ?

Exercices Chap. 21

Exercice 2 :
Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \phi(x, y) = (x - y, x + 2y)$. Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi(P) = nXP - (X^2 + 1)P'$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9 : *Trace d'une matrice carrée.*
1. On définit l'application trace par : $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ Montrer que φ est une forme linéaire.

$$M \longmapsto \mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$

2. Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. Existe-t-il un couple de matrices carrées (A, B) tel que $AB - BA = I_n$?

Exercice 11 :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2.\mathrm{id}_E = 0$.
1. Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2.\mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Exercice 14 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E.
1. Montrer que : $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\}$
2. Montrer que : $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im} f$.

Exercice 15 :
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
1. Déterminer le rang de f.
2. En déduire la dimension du noyau de f. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.
3. A-t-on $\mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f = \mathbb{R}_2[X]$?