Semaine de colles n°26 du 20/05/24 au 24/05/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Applications linéaires

I – Définitions et propriétés de calcul

II – Noyau et image d'une application linéaire

- Noyau et image d'une application linéaire, caractérisation application linéaire injective/surjective.
- f : E ⟶ F linéaire alors : Ker f sev de E et f injective ⇔ Ker f = $\{0_E\}$
  Im f sev de F et f surjective ⇔ Imf = F
- Si f ∈ $\mathcal{L}$(E, F) et g ∈ $\mathcal{L}$(F, G) : • Im (g o f) ⊂ Im g et Ker f ⊂ Ker(g o f)
  • g ∘ f = 0 ⇔ Im f ⊂ Ker g **(*)**
- Équations linéaires : définition et structure de l'ensemble des solutions.
- Formes linéaires et hyperplans : un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Si D droite vectorielle non contenue dans un hyperplan H alors E = H ⊕ D, caractérisation en dimension finie.

III – Lien avec les familles de vecteurs

- Image par une application linéaire d'une famille génératrice, d'une famille liée
- Image par une application linéaire **injective** d'une famille libre.
- Définition d'une application linéaire par l'image d'une base :
  Si (e_1, e_2,.. e_n) est une **base** de E et (y_1, y_2,.. y_n) ∈ F^n, alors : ∃ ! f ∈ $\mathcal{L}$(E, F), ∀ i ∈ ⟦1, n⟧ , f(e_i) = y_i

Avec f injective ⇔ (y_1, y_2,.. y_n) famille libre dans F etf surjective ⇔ (y_1, y_2,.. y_n) famille génératrice de F

- Si F et G sev supplémentaires de E, alors une application linéaire définie sur E est entièrement déterminée par ses restrictions à F et G.
- Deux e.v. sont isomorphes ssi ils ont même dimension, tout $\mathbb{K}$-ev de dimension $n > 0$, est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- Si E et F sont deux ev de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à dim E × dim F.

IV – Introduction aux matrices d'applications linéaires

- Écriture de la matrice d'une application linéaire f ∈ $\mathcal{L}(E, F)$ définie par l'image d'une base de E ou définie explicitement, relativement à des bases données.
- Multiplication d'une matrice par la matrice colonne des **coordonnées** d'un vecteur pour obtenir les **coordonnées** de son image par f. Il faut faire attention aux bases avec lesquelles on travaille.

IV – Applications linéaires en dimension finie

- Rang d'une application linéaire
- Théorème du rang :

Soit E ev. , F ev. quelconque et f ∈ $\mathcal{L}$(E, F). Im f est isomorphe à tout supplémentaire de Ker f dans E. **(*)**

Si de plus, E est de **dimension finie** : dim E = dim(Ker f) + rg f = dim(Ker f) + dim(Im f) **(*)**

- Caractérisation des applications linéaires injectives, surjectives, bijectives à l'aide du rang.
- Si **dim E** = **dim F** et f ∈ $\mathcal{L}$(E, F) alors on a : f bijective ⇔ f injective ⇔ f surjective

Si E endomorphisme en dimension finie, f bijective ssi f inversible à droite ou à gauche

- Invariance du rang par composition, à droite ou à gauche, par un isomorphisme.

V – Exemples usuels d'applications linéaires

- Homothéties vectorielles
- Projecteurs : définition, propriétés, caractérisation par idempotence :

Si p est un endomorphisme idempotent de E (càd p o p = p) alors :

1. x ∈ Im p ⇔ p(x) = x
2. E = Ker p ⊕ Im p
3. p est le projecteur sur Im p parallèlement à Ker p

(*)

- Symétries vectorielles : définition, propriétés, caractérisation par involutivité :

Si s est un endomorphisme involutif de E (càd s o s = Id_E) alors : 1. E = Ker(s – id_E) ⊕ Ker(s + id_E)
2. s symétrie par rapport à Ker(s – id_E) parallèlement à Ker(s + id_E).

NOUVEAU COURS :

• Comparaison locale des fonctions (Partie 1)

I – Relations de comparaison locale des fonctions

- Notion de voisinage
- Relation de domination : définition, caractérisation par quotient, propriétés.
- Fonction négligeable devant une autre : définition, caractérisation par quotient, propriétés, comparaison des fonctions de références.
- Fonctions équivalentes : définition, caractérisation par quotient
  Propriétés : symétrie, transitivité, compatibilité avec les opérations, substitution.
- Obtention d'équivalent par encadrement
- Équivalents et signe des expressions, liens entre équivalents et limites.
- Si f dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)\,(x-a)$.
- Équivalents de référence : A savoir démontrer **(*)**
  - cas des fonctions polynomiales

• $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$	• $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$	• Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé** : $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$
• $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$	• $\ln(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} x$	• $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$	• $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$	$\arccos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2}$

• Utilisation des matrices en algèbre linéaire

I – Matrices représentatives

- Matrices représentatives d'un vecteur, d'une famille de vecteur, d'une application linéaire dans des bases données.

II – Opérations sur les matrices représentatives

- Combinaisons linéaires de matrices représentatives d'applications linéaires, isomorphisme entre $\mathcal{L}$(E, F) et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où dim E = p et dim F = n, dimension de $\mathcal{L}$(E, F).
- Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
- Produit de matrices représentatives d'applications linéaires, lien entre applications linéaires bijectives et matrices inversibles.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 27 : Utilisation des matrices en algèbre linéaire (Notion de rang) et déterminants

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Un calcul de limite avec utilisation d'équivalents
3. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10

Semaine de colles n°26 du 20/05/24 au 24/05/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 21

Exercice 9 : *Trace d'une matrice carrée.*

1. On définit l'application trace par : $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ Montrer que φ est une forme linéaire.

$$M \longmapsto \mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$

2. Montrer que : $\forall$ (A, B) $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, tr(AB) = tr(BA).

3. Existe-t-il un couple de matrices carrées (A, B) tel que AB – BA = I_n ?

Exercice 11 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2.\mathrm{id}_E = 0$.

1. Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2.\mathrm{id}_E)$.

2. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Exercice 14 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$

2. Montrer que : $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 15 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer le rang de f.

2. En déduire la dimension du noyau de f. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

3. A-t-on $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f = \mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 17 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

Soit f l'unique endomorphisme de E vérifiant : $f(e_1) = e_2 - e_3$, $f(e_2) = e_3 - e_1$ et $f(e_3) = e_1 - e_2$.

1. Déterminer une base de Im f et une base de Ker f.

2. Montrer que Ker f et Im f sont supplémentaires dans E.

Exercice 20 :

Soit E espace vectoriel de dimension 3. On considère f non nul, dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Déterminer le rang de f.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E dans laquelle la matrice de f soit : $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 25 :

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.

On suppose que f est nilpotent d'ordre n c'est-à-dire $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Justifier qu'il existe un vecteur x de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.

2. Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

3. Déterminer la matrice de f dans cette base. Quel est le rang de f ?

Exercice 26 :

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f + g$ soit bijectif et $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Que vaut rg f + rg g ?

Exercice 31 :

Soit $u = (1, 1, 2)$, $v = (-2, -1, 3)$ et $w = (0, -3, -1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On pose : F = Vect(u, v) et G = Vect(w).

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire ?

2. a. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$.

b. Déterminer la matrice de p relativement à la base canonique $\mathcal{B}c$ de $\mathbb{R}^3$.

Pas de liste d'exercices à savoir refaire sur le Chap. 22

Il faut savoir calculer des limites avec utilisation d'équivalents.