Semaine de colles n°27 du 27/05/24 au 31/05/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Comparaison locale des fonctions (Partie 1)

I – Relations de comparaison locale des fonctions

- Notion de voisinage
- Relation de domination : définition, caractérisation par quotient, propriétés.
- Fonction négligeable devant une autre : définition, caractérisation par quotient, propriétés, comparaison des fonctions de références.
- Fonctions équivalentes : définition, caractérisation par quotient
  Propriétés : symétrie, transitivité, compatibilité avec les opérations, substitution.
- Obtention d'équivalent par encadrement
- Équivalents et signe des expressions, liens entre équivalents et limites.
- Si f dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a)$.
- Équivalents de référence : A savoir démontrer **(*)**
  - cas des fonctions polynomiales

- $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$
- $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

- $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\ln(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé** : $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$
- $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\arccos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$

• Utilisation des matrices en algèbre linéaire

I – Matrices représentatives

- Matrices représentatives d'un vecteur, d'une famille de vecteur, d'une application linéaire dans des bases données.

II – Opérations sur les matrices représentatives

- Combinaisons linéaires de matrices représentatives d'applications linéaires, isomorphisme entre $\mathcal{L}$(E, F) et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où dim E = p et dim F = n, dimension de $\mathcal{L}$(E, F).
- Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
- Produit de matrices représentatives d'applications linéaires, lien entre applications linéaires bijectives et matrices inversibles.

NOUVEAU COURS :

III – Changement de bases

- Matrices de passage entre deux bases : $P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$, les matrices de passages sont inversibles.
- Effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur et sur une matrice d'application linéaire.
- Définition de matrices semblables, cartérisation : elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

IV – Rang d'une matrice

- Définition, propriétés, caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang.
- Lien avec le rang d'une application linéaire.
- Multiplier une matrice par une matrice inversible ne change pas son rang.
- Les OEL et les OEC conservent le rang.
- Le rang d'une matrice est invariant par transposition.

• Déterminants

I – Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

- Définitions : Forme n-linéaire / alternée / symétrique.
- Prop admise : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E de dim n est un ev de dimension 1.
- Définition : $\det_B$ est l'unique forme n-linéaire alternée sur E telle que $\det_B(B) = 1$
- Propriétés : $\det_B$ est antisymétrique, det d'une famille avec au moins un vecteur nul, $\det_B(\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n) = \ldots$
- Si B et B' bases de E, lien entre $\det_B$ et $\det_{B'}$, caractérisation d'une base.

II – Expression du déterminant lorsque n = 2 ou n = 3

- Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées dans les cas n = 2 et n = 3

Rq. Interprétation en termes d'aire/volume.

III – Déterminant d'un endomorphisme

- Définition, propriétés, déterminant d'une composée, caractérisation des automorphismes.

III - Déterminant d'une matrice carrée

- Définition : déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs, lien avec le déterminant d'un endomorphisme.
- Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle, deux colonnes égales ou proportionnelles est nul.
- Caractérisation matrices inversibles, déterminant d'un produit, de A^p, A^{-1} lorsque A est inversible, et de A^T.

IV – Calcul pratique du déterminant d'une matrice carrée

- Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Déterminant d'une matrice triangulaire
- Effet des opérations élémentaires

Rq. pour les interrogateurs : Nous n'avons pas encore fait d'exercices sur le chapitre « Déterminants » donc soyez modestes en début de semaine.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 28 : Variables aléatoires (début)

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
   Ou un exercice très proche d'un fait en cours (cf exos à savoir refaire) (*)
2. Un calcul de limite avec utilisation d'équivalents
3. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10

Semaine de colles n°27 du 27/05/24 au 31/05/24 - Exercices à savoir refaire

Pas de liste d'exercices à savoir refaire sur le Chap. 22

Il faut savoir calculer des limites avec utilisation d'équivalents.

Exercices Chap. 23

Révisions :

- Revoir le calcul de l'inverse d'une matrice
- Revoir les méthodes pour calculer les puissances d'une matrice

Exercice fait dans le cours : ***(*)***

On considère $u = (1, 2, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (-1, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$.

On pose : $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ et $G = \mathrm{Vect}(w)$

1. Montrer que : $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire pour F et G ?

2. Déterminer la matrice représentative de la symétrie s par rapport à F, parallèlement à G, relativement à la base (u, v, w).

3. En utilisant la formule de changement de bases, déterminer la matrice de s relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4. Comment retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser la formule de changement de bases ?

Exercice 5 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 5 \\ a & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer le rang de f, une base de son image et une base de son noyau.

Exercice 14 : Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, trouver le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & c & a & c \\ b & b & d & d \\ ab & cb & ad & cd \end{pmatrix}$.

Exercice 19 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice, notée $M(f, \mathcal{F})$, de f dans la base $\mathcal{F}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $M(f^n, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20 :

Soit f un endomorphisme de E de dimension n. On suppose que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $f^2 - 3f + 2.\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = ax$. Montrer que $a \in \{1, 2\}$.

Rq. On dit alors que a est une _valeur propre de f_ et que x est un _vecteur propre de f_ associé à la valeur propre a.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

3. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 21 :

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réel a tels que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$. (Fait en TD avec le déterminant)

2. Pour chaque valeur de a trouvée à la question précédente, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E)$.

3. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f soit diagonale.

4. En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercices Chap. 24

Exercices faits dans le cours : ***(*)***

Ex. Cours 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $\det(A)$ sous forme factorisée.

Ex. Cours 2. Soit $n \geq 1$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & (0) & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & (0) & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose : $d_n = \det A_n$.

1er méthode : On développe par rapport à la dernière colonne et on trouve une formule de récurrence.

2ème méthode : En utilisant les OEC.