Semaine de colles n°28 du 03/06/24 au 07/06/24

Du programme précédent :

• Utilisation des matrices en algèbre linéaire

I – Matrices représentatives

II – Opérations sur les matrices représentatives

III – Changement de bases

- Matrices de passage entre deux bases : $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$, les matrices de passages sont inversibles.
- Effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur et sur une matrice d'application linéaire.
- Définition de matrices semblables, cartérisation : elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

IV – Rang d'une matrice

- Définition, propriétés, caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang.
- Lien avec le rang d'une application linéaire.
- Multiplier une matrice par une matrice inversible ne change pas son rang.
- Les OEL et les OEC conservent le rang.
- Le rang d'une matrice est invariant par transposition.

• Déterminants

I - Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

- Définitions : Forme n-linéaire / alternée / symétrique.
- Prop admise : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E de dim n est un ev de dimension 1.
- Définition : $\det_B$ est l'unique forme n-linéaire alternée sur E telle que $\det_B(B) = 1$
- Propriétés : $\det_B$ est antisymétrique, det d'une famille avec au moins un vecteur nul, $\det_B(\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n) = \ldots$
- Si B et B' bases de E, lien entre $\det_B$ et $\det_{B'}$, caractérisation d'une base.

II – Expression du déterminant lorsque n = 2 ou n = 3

- Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées dans les cas n = 2 et n = 3

Rq. Interprétation en termes d'aire/volume.

III – Déterminant d'un endomorphisme

- Définition, propriétés, déterminant d'une composée, caractérisation des automorphismes.

III - Déterminant d'une matrice carrée

- Définition : déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de K^n.
- Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs, lien avec le déterminant d'un endomorphisme.
- Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle, deux colonnes égales ou proportionnelles est nul.
- Caractérisation matrices inversibles, déterminant d'un produit, de A^p, A^{-1} lorsque A est inversible, et de A^T.

IV – Calcul pratique du déterminant d'une matrice carrée

- Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Déterminant d'une matrice triangulaire
- Effet des opérations élémentaires

Nouveau cours :

• Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

I – Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

- Définition, événements de la forme $(X \in A)$, $(X = x)$, etc.
- Système complet d'événements associé à une variable aléatoire

II – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

- Définition : P_X définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ et caractérisée par $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$
- Image d'une variable aléatoire par une application et loi associée.
- Loi conditionnelle d'une VA sachant un évènement

III – Indicateurs de position et de dispersion

- Espérance : définition, interprétation, exemples, propriétés, formule de transfert.
- Variance et écart-type : définition, interprétation, exemples, formule de Koenig-Huygens, propriétés.
- Inégalité de Markov **(*)** et Inégalité de Bienaymé-Tchebychev **(*)**.

IV – Lois usuelles

- Loi uniforme : définition, exemples, espérance et variance.
  Calcul espérance et variance dans le cas où $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ **(*)**
- Loi de Bernoulli : définition, exemples, espérance et variance.
- Loi binomiale : définition, exemples, espérance et variance. **(*)**

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 29 : VA (Familles de VA) + DL

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10

Semaine de colles n°27 du 03/06/24 au 07/06/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 23

Révisions :

- Revoir le calcul de l'inverse d'une matrice
- Revoir les méthodes pour calculer les puissances d'une matrice

Exercice fait dans le cours : *(*)*

On considère $u = (1, 2, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (-1, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$.

On pose : $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ et $G = \mathrm{Vect}(w)$

1. Montrer que : $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire pour F et G ?

2. Déterminer la matrice représentative de la symétrie s par rapport à F, parallèlement à G, relativement à la base (u, v, w).

3. En utilisant la formule de changement de bases, déterminer la matrice de s relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4. Comment retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser la formule de changement de bases ?

Exercice 20 :

Soit f un endomorphisme de E de dimension n. On suppose que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $f^2 - 3f + 2.\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = ax$. Montrer que $a \in \{1, 2\}$.

Rq. On dit alors que a est une *valeur propre* de f et que x est un *vecteur propre* de f associé à la valeur propre a.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

3. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 21 :

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réel a tels que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$. (Fait en TD avec le déterminant)

2. Pour chaque valeur de a trouvée à la question précédente, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E)$.

3. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f soit diagonale.

4. En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercices Chap. 24

Exercices faits dans le cours :

Ex. Soit $n \geq 1$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & (0) & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & (0) & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose : $d_n = \det A_n$.

1

1$^{\text{er}}$ méthode : On développe par rapport à la dernière colonne et on trouve une formule de récurrence.

2$^{\text{ème}}$ méthode : En utilisant les OEC.

Exercice 2 : *Déterminant d'ordre* 3.

Calculer, **sous forme factorisée**, les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} \qquad D_5 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad D_7 = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 3 : 2. Calculer, **sous forme factorisée**, les déterminants suivants : $D_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

Exercice 4 : Calculer les déterminants, d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, suivants :

1. $\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & 2\beta & \cdots & 2\beta \\ 2\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\beta \\ 2\alpha & \cdots & 2\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

2. $\Delta_n(a) = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$

6. $\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 8 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda_n+x \end{vmatrix}$.

Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x, puis calculer $\Delta_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 : *Déterminant de Vandermonde.*

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de ce déterminant.

1. 1$^{\text{ère}}$ *méthode.* À l'aide d'O.E.C., trouver une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}. Conclure.

2. 2$^{\text{ème}}$ *méthode.* En utilisant le polynôme $P = \prod_{k=1}^{n-1}(X - x_k)$

Exercice 20 : *Diagonalisation.*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$, est une ***valeur propre*** de f lorsqu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que : $f(x) = \lambda x$.

1. Montrer que : λ valeur propre de $f \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0$.

2. Déterminer les valeurs propres de f.

3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $M(f, \mathcal{B})$ soit diagonale.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercices Chap. 25

Exercice 4 :

Donner la loi suivie par X dans les cas suivants :

1. On choisit un jeton au hasard dans un sac contenant 10 jetons numérotés de 1 à 10. On note X le numéro du jeton.

2. On note X le nombre de garçons dans une famille de 4 enfants.

3. Alice a égaré son poly. sur les variables aléatoires dans son classeur de maths qui compte 500 feuilles. Elle décide de la chercher en vérifiant toutes les pages dans l'ordre. La variable aléatoire X est égale au rang d'apparition de son précieux poly.

4. On range au hasard 9 clés dans 3 tiroirs. On note X le nombre de clés dans le premier tiroir.

5. Seul 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles et on note X de nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

6. On note X le nombre de faces noires obtenues en lançant 5 fois un dé à 6 faces dont 2 blanches et 4 noires.

Exercice 10 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n tickets dont un en or donnant accès à une chocolaterie. On effectue des tirages successifs sans remise dans cette urne et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du ticket d'or.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.