Semaine de colles n°29 du 10/06/24 au 14/06/24

Du programme précédent :

- **Déterminants**

I – Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

II – Expression du déterminant lorsque n = 2 ou n = 3

III – Déterminant d'un endomorphisme

III - Déterminant d'une matrice carrée

- Définition : déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de K^n.
- Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs, lien avec le déterminant d'un endomorphisme.
- Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle, deux colonnes égales ou proportionnelles est nul.
- Caractérisation matrices inversibles, déterminant d'un produit, de A^p, A^{-1} lorsque A est inversible, et de A^T.

IV – Calcul pratique du déterminant d'une matrice carrée

- Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Déterminant d'une matrice triangulaire
- Effet des opérations élémentaires

- **Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini**

I – Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

- Définition, événements de la forme $(X \in A)$, $(X = x)$, etc.
- Système complet d'événements associé à une variable aléatoire

II – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

- Définition : P_X définie sur $\mathscr{P}(X(\Omega))$ et caractérisée par $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$
- Image d'une variable aléatoire par une application et loi associée.
- Loi conditionnelle d'une VA sachant un évènement

III – Indicateurs de position et de dispersion

- Espérance : définition, interprétation, exemples, propriétés, formule de transfert.
- Variance et écart-type : définition, interprétation, exemples, formule de Koenig-Huygens, propriétés.
- Inégalité de Markov ***(*)*** et Inégalité de Bienaymé-Tchebychev ***(*)***.

IV – Lois usuelles

- Loi uniforme : définition, exemples, espérance et variance.
  Calcul espérance et variance dans le cas où $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ***(*)***
- Loi de Bernoulli : définition, exemples, espérance et variance.
- Loi binomiale : définition, exemples, espérance et variance. ***(*)***

Nouveau cours :

- **Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini**

V – Couples de VA

- Couple de VA, Loi conjointe, lois marginales, covariance.
- Loi d'une composée
- Couple de VA indépendantes, espérance et variance.

VI – Généralisation au n-uplet de VA

- n-uplet de VA mutuellement indépendantes, lemme des coalitions
- Loi binomiale comme somme de loi de Bernoulli de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

- **Comparaison locale des fonctions : Développements limités (Partie 2)**

II – Notion de développements limités

- Développements limités au voisinage de 0, d'un point a quelconque, unicité de la partie régulière.
- Cas particulier des DL d'ordre 0 et 1 : lien avec la continuité (ou le prolongement par continuité) et la dérivabilité en a (de f ou de son prolongement)
- Propriétés : troncature, substitution, parité, lien avec les équivalents.
- Deux exemples : $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \dots$ et $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \dots$

III – Formule de Taylor Young et DL usuels

- Formule de Taylor Young (admise pour le moment).
- $DL_n(0)$ usuels : exp, ch, sh, cos, sin, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé.**

IV – Opérations sur les DL

- Somme, produit

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 30 : DL (fin)

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10

Semaine de colles n°29 du 10/06/24 au 14/06/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 24

Exercice 2 : *Déterminant d'ordre* 3.
Calculer, **sous forme factorisée**, les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} \qquad D_5 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad D_7 = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 3 : **2.** Calculer, **sous forme factorisée**, les déterminants suivants : $D_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

Exercice 4 : Calculer les déterminants, d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, suivants :

1. $\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & 2\beta & \dots & 2\beta \\ 2\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\beta \\ 2\alpha & \cdots & 2\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$ **2.** $\Delta_n(a) = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$ **6.** $\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$, $\theta \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 8 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda_n+x \end{vmatrix}$.

Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x, puis calculer $\Delta_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 : *Déterminant de Vandermonde.*

Soit $(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de ce déterminant.

1. 1ère *méthode.* À l'aide d'O.E.C., trouver une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}. Conclure.

2. 2ème *méthode.* En utilisant le polynôme $P = \prod_{k=1}^{n-1}(X - x_k)$

Exercice 20 : *Diagonalisation.*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$, est une <u>*valeur propre*</u> de f lorsqu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que : $f(x) = \lambda x$.

1. Montrer que : λ valeur propre de $f \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0$.

2. Déterminer les valeurs propres de f.

3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $M(f, \mathcal{B})$ soit diagonale.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercices Chap. 25

Exercice 10 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n tickets dont un en or donnant accès à une chocolaterie. On effectue des tirages successifs sans remise dans cette urne et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du ticket d'or.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 13 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boites numérotées de 1 à n.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, la boite numérotée k contient k boules numérotées 1 à k. On choisit au hasard une boule dans une boite.
On note X le numéro de la boite et Y celui de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

2. En déduire la loi de Y (on laissera sous forme d'une somme) et son espérance.

Exercice 14 :
On lance un dé honnête et on note X le nombre obtenu.
On relance ensuite X fois le dé et on note Y le nombre de 1 obtenus parmi ces X tirages.
Déterminer la loi conjointe de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 15 :
Soit un nombre entier $n \geq 1$ et deux nombres réels p et a de $]0, 1[$.
Le nombre de graines plantées sur un mètre carré de jardin est une variable aléatoire N qui suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.
Chaque graine a la probabilité a de germer. Soit G le nombre de graines qui ont germé.

1. Pour tout i et j dans $[\![0, n]\!]$, déterminer la probabilité $P_{(N = i)}(G = j) = P(G = j \mid N = i)$.

2. Déterminer la loi du couple (N, G).

3. En déduire la loi de G.

Exercice 16 :
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ avec $p \in [0, 1]$ et $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Déterminer la loi de S = X + Y.

Exercice 22 :
Soit $X_1, \dots X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. a. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$.
Ind. On pourra commencer par déterminer $P(Y \leq k)$ pour $k \in Y(\Omega)$

b. Montrer que : $E(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

2. a. Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$.

b. On note A l'événement : « il existe au moins un $i \in [\![1, n]\!]$, tel que $X_i = 1$ ». Montrer que : $P(A) \geq 1 - \frac{1}{e}$.

Exercice 25 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois un dé à 6 faces.
Comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 strictement compris entre 0 et $\frac{n}{3}$ soit supérieure

Exercices Chap. 25

Exercice 1 : *Opérations algébriques.*

3. Déterminer le $DL_4(0)$ de $f_3 : x \longmapsto 2\,\mathrm{ch}\,x - 3\sqrt{1+2x}$

4. Déterminer le $DL_4(0)$ de $f_4 : x \longmapsto e^{3x}\ln(1+x)$

5. Déterminer le $DL_4(0)$ de $f_5 : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^3}$

7. Déterminer le $DL_3(0)$ de $f_7 : x \longmapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$