Semaine de colles n°30 du 17/06/24 au 21/06/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

I – Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

II – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

III – Indicateurs de position et de dispersion

IV – Lois usuelles

V – Couples de VA
- Couple de VA, Loi conjointe, lois marginales, covariance.
- Loi d'une composée
- Couple de VA indépendantes, espérance et variance.

VI – Généralisation au n-uplet de VA
- n-uplet de VA mutuellement indépendantes, lemme des coalitions
- Loi binomiale comme somme de loi de Bernoulli de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

• Comparaison locale des fonctions : Développements limités (Partie 2)

II – Notion de développements limités
- Développements limités au voisinage de 0, d'un point a quelconque, unicité de la partie régulière.
- Cas particulier des DL d'ordre 0 et 1 : lien avec la continuité (ou le prolongement par continuité) et la dérivabilité en a (de f ou de son prolongement)
- Propriétés : troncature, substitution, parité, lien avec les équivalents.
- Deux exemples : $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \dots$ et $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \dots$

III – Formule de Taylor Young et DL usuels
- Formule de Taylor Young (admise pour le moment).
- $DL_n(0)$ usuels : exp, ch, sh, cos, sin, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé**.

IV – Opérations sur les DL
- Somme, produit

NOUVEAU COURS :

• Comparaison locale des fonctions : Développements limités (Partie 2)

IV – Opérations sur les DL
- Somme, produit, composition, inverse, quotient. Ex : $DL_6(0)$ de tan par quotient **(*)**
- Développements limités d'une primitive. Ex : $DL_5(0)$ de la fonction arccosinus **(*)**
- $DL_n(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto \ln(1-x)$ et $x \longmapsto \arctan(x)$

  Ex : $DL_6(0)$ de la fonction tangente en utilisant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ **(*)**

V – Applications des DL
- À l'étude locale des fonctions en un point : équivalents/limites, continuité/dérivabilité, tangente et sa position relative par rapport à Cf.
- À l'étude des branches infinies.

• Intégration sur un segment des fonctions continues

I – Fonctions en escalier sur un segment
- Subdivision d'un segment, fonctions en escalier sur un segment
- Approximation des fonctions continues sur un segment, par des fonctions en escalier. (th. admis)

II – Intégrale d'une fonction continue sur un segment
- Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment et propriétés
- Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, interprétation en termes d'aire (admis)

III – Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment
- Propriétés : linéarité, positivité et croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire.
- Soit f une fonction continue et de **signe constant** sur $[a, b]$. On a : $\int_{[a,b]} f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Rq. Si f est continue, de signe constant sur $[a, b]$ et non nulle alors $\int_{[a,b]} f \neq 0$.

- Inégalité de la moyenne **(*)**, valeur moyenne d'une fonction.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Définition de $\int_a^b f$ avec a et b quelconques, propriétés restants valables si $a > b$, relation de Chasles.

IV – Lien entre intégrales et primitive d 'une fonction continue
- Primitive d'une fonction continue, lien primitives/intégrales.
- Étude de $x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{1}{te^t}dt$: ensemble de définition, variations, étude en 0 (prolongement et dérivabilité du prolongement en 0), étude en $\pm\infty$. Une question de cours pourra être tout ou une partie de cet exemple **(*)**

V – Formules de Taylor
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

VI – Sommes de Riemann
- Méthodes des rectangles à droite et à gauche, sommes de Riemann.

Rq interrogateurs : Nous n'avons pour le moment pas fait d'exercices sur ce chapitre.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10

Semaine de colles n°30 du 17/06/24 au 21/06/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 25

Exercice 13 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boites numérotées de 1 à n.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, la boite numérotée k contient k boules numérotées 1 à k. On choisit au hasard une boule dans une boite.
On note X le numéro de la boite et Y celui de la boule.
1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. En déduire la loi de Y (on laissera sous forme d'une somme) et son espérance.

Exercice 14 :
On lance un dé honnête et on note X le nombre obtenu.
On relance ensuite X fois le dé et on note Y le nombre de 1 obtenus parmi ces X tirages.
Déterminer la loi conjointe de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 15 :
Soit un nombre entier $n \geq 1$ et deux nombres réels p et a de]0, 1[.
Le nombre de graines plantées sur un mètre carré de jardin est une variable aléatoire N qui suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.
Chaque graine a la probabilité a de germer. Soit G le nombre de graines qui ont germé.
1. Pour tout i et j dans $[\![0, n]\!]$, déterminer la probabilité $P_{(N = i)}(G = j) = P(G = j \mid N = i)$.
2. Déterminer la loi du couple (N, G).
3. En déduire la loi de G.

Exercice 16 :
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ avec $p \in [0, 1]$ et $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 22 :
Soit $X_1, \dots X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
1. a. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$.
Ind. On pourra commencer par déterminer $P(Y \leq k)$ pour $k \in Y(\Omega)$

b. Montrer que : $E(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

2. a. Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$.

b. On note A l'événement : « il existe au moins un $i \in [\![1, n]\!]$, tel que $X_i = 1$ ». Montrer que : $P(A) \geq 1 - \frac{1}{e}$.

Exercice 25 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois un dé à 6 faces.
Comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 strictement compris entre 0 et $\frac{n}{3}$ soit supérieure

Exercices Chap. 26

Il faut savoir calculer des DL avec somme, quotient, composée, utilisation du th d'intégration terme à terme, …
Il faut savoir utiliser les DL pour réaliser une étude locale ou l'étude d'une branche infinie

Exercice 10 :
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \exp(x^2)$.
1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Justifier que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^5$ sur $\mathbb{R}$.
Quelle est sa parité ?
Calculer le $DL_5(0)$ de f^{-1}. *On ne cherchera à aucun moment à déterminer explicitement f^{-1}.*

Exercices Chap. 27

- TD : Intégrale de Wallis (à préparer pour le TD de mardi)

Pour tout entier naturel n, on considère l'intégrale de Wallis d'indice n : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$

1. a. Calculer I_0 et I_1.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_{n+1} \leq I_n$. Puis, en déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

3. a. Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En utilisant que $I_n = \int_0^a \sin^n(t)dt + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq a \sin^n a + \frac{\pi}{2} - a$.

b. En déduire que : $\ell = 0$.

4. Montrer à l'aide d'une intégration par parties à partir de I_{n+2}, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

5. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. En déduire que : $I_{n+1} \sim I_n$.