Semaine de colles n°6 du 04/11/24 au 08/11/24

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Les nombres complexes

I - Ensemble des nombres complexes ℂ

II - Forme trigonométrique

III - Applications à la trigonométrie

III - Applications à la trigonométrie.

- Calcul des sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. **(*)**

IV – Résolution d'équations dans ℂ

Rappel / complément : Si z_0 est solution d'une équation polynomiale alors elle se factorise par $(z - z_0)$.

- Racines carrées d'un complexe : Définition, méthode de calcul, tout complexe non nul admet 2 racines carrées opposées.
- Application à la résolution d'une équation de degré 2.
- Racine n-ième de l'unité, somme et produit.

Rq. Une question de cours pourra être de donner la définition et la justification des expressions des racines n-ième de l'unité. **(*)**

- Racines cubiques de l'unité : 1, j et $\bar{j} = j^2$.

  Relations : $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et j et j^2 sont les solutions de $z^2 + z + 1 = 0$.
- Résolution de $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$.

V – Nombres complexes et géométrie plane

- Interprétation graphique des complexes, module, argument.
- Affixe d'un point, d'un vecteur, lieux de points usuels (cercles, disques, médiatrices)
- Caractérisation de points alignés, caractérisation de droites perpendiculaires.
- Transformations du plan (définitions + expressions complexes) : symétrie orthogonale d'axe (Ox)

  Translations

  Rotation de centre Ω et de rayon r

  Homothétie de centre Ω et de rapport k > 0.

VI – Compléments sur les fonctions à valeurs complexes

- La dérivée d'une fonction à valeurs dans ℂ est définie par dérivation de ses parties réelle et imaginaire.
- Dérivation de $x \longmapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{C}$ et de $t \longmapsto e^{\varphi(t)}$ avec $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I intervalle de ℝ.

NOUVEAU COURS :

• Calcul de sommes et de produits

I – Le symbole Σ

- Notation Σ pour les sommes
- Règles de calcul : termes constants, facteur constant, changement d'indice, symétrie, sommes télescopiques.
- Séparation des termes pairs et impairs
- Sommes classiques : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ **(*)** et $\sum_{k=1}^{n} k^3$.
- Sommes de type géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On a : $\sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} q^p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ **(*)**
- Formule de Bernoulli : $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$
- Cas des sommes doubles, Sommes triangulaires : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x_{i,j} = \sum_{1 \le j \le i \le n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} x_{i,j}$

II – Le symbole Π

- Notation Π pour les produits
- Règles de calcul, produits télescopiques.

III – Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie

- Définition de n !, de $\binom{n}{k}$, valeurs particulières, symétrie et Si $1 \le k \le n$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- Formule du triangle de Pascal et formule du binôme de Newton.
- Application à la trigonométrie : **(*)** *– Un exercice utilisant une des deux méthodes ci-dessous.*

Pour transformer des produits de $\cos^p x$ et $\sin^q x$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, en somme de $\cos(kx)$ et $\sin(lx)$ où $(k, l) \in \mathbb{N}^2$:

Utiliser les formules d'Euler puis appliquer la formule du binôme de Newton.

Pour exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, avec *n* entier, en fonction de sin *x* et cos *x* :

On a : $\cos(nx) = \mathrm{Re}(e^{inx}) = \mathrm{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$ et $\sin(nx) = \mathrm{Im}(e^{inx}) = ..$ d'après la formule de De Moivre

Ensuite, on utilise la formule du binôme de Newton.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n°7 : Calcul de sommes et de produits

Déroulement d'une colle

1. Une formule de trigonométrie A CONNAITRE SANS HESITATION ! cf. formulaire programme 5
2. Résolution d'une équation dans ℂ : $e^z = a$ ou degré 2 ou $z^n = a$.
3. Une question de cours parmi celles signalées par (*).
4. Exercice(s) : On pourra commencer par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°6 du 04/11/24 au 08/11/24 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 4

Exercice 25 : *Équations avec des modules.*
1. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z+1| = |z| + 1$.
2. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z| = |1-z| = \dfrac{1}{|z|}$.

Exercice 26 : *Équations avec des arguments.*
1. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $2\arg(z+i) \equiv \arg(z) + \arg(i)\ [\pi]$.

Exercice 27 :
2. Trouver tous les complexes z tels que : $z^3 = -16\,\bar{z}^{\,7}$.

Exercice 31 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.
a. $(z+1)^n = (z-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
Nous avons montré que $n-1$ solutions trouvées sont imaginaires pures et 2 à 2 distinctes.

Exercice 33 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a. $z^2 + (1-2i)z + 3(1-i) = 0$
d. $iz^3 + (2i-1)z^2 - (i+4)z + 3(2i-1) = 0$ *Ind. vérifier l'existence d'une solution réelle.*

Exercice 37 : *A savoir retrouver très rapidement !*
Soit A, B et M trois points du plan complexe, distincts deux à deux, d'affixes respectives a, b et z. On pose : $Z = \dfrac{z-a}{z-b}$.
Montrer que l'on a :
1. A, B, M alignés $\Leftrightarrow$ $Z \in \mathbb{R}^*$
2. ABM rectangle en M $\Leftrightarrow$ $Z \in i\mathbb{R}^*$
3. ABM isocèle en M $\Leftrightarrow$ $|Z| = 1$
4. ABM rectangle isocèle en M $\Leftrightarrow$ $Z = i$ ou $Z = -i$
5. ABM équilatéral $\Leftrightarrow$ $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 40 :
a. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : M, P point d'affixe iz et I point d'affixe i sont alignés.
b. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $\left[z-(1+i)\right]\left[\bar{z}-(1-i)\right] = 8$

Exercices Chap. 5

Exercice 4 : Calculer les sommes suivantes (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$ **2.** $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ **3.** $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

5. $S_5 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$ **7.** $S_7 = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$

Exercice 5 : *Sommes doubles.*
Calculer les sommes suivantes (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} \frac{i}{k+1}$ **2.** $S_2 = \displaystyle\sum_{1 \le i, j \le n} ij$ **3.** $S_3 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$ **4.** $S_4 = \displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le n} (i+j)$

Exercice 6 :
Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a^k$
1. Calculer S_n lorsque $a = 1$.
2. Lorsque $a \neq 1$, calculer $a\,S_n - S_n$ et en déduire la valeur de S_n.
3. Lorsque $a \neq 1$, retrouver le résultat précédent en remarquant que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a^k$.

Exercice 14 :
Calculer les sommes suivantes (n appartient à $\mathbb{N}$) :
1. $S_1' = \displaystyle\sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k}$ et $S_1'' = \displaystyle\sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{2k+1}$
2. $S_2' = \displaystyle\sum_{0 \le 2k \le n} (-1)^k \binom{n}{2k}$ et $S_2'' = \displaystyle\sum_{0 \le 2k+1 \le n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$

Exercice 17 :
1. Soit n et p deux entiers naturels tels que $1 \le p \le n$. Montrer que : $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$ Formule à connaître
2. Calculer les sommes suivantes : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$, $S' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$ et $S'' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}\binom{n}{k}$.