# Semaine de colles n°27 du 19/05/25 au 23/05/25

## DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

### • Applications linéaires

**I – Définitions et propriétés de calcul**

**II – Noyau et image d'une application linéaire**

**III – Lien avec les familles de vecteurs**

**IV – Applications linéaires en dimension finie**

### • Comparaison locale des fonctions (Partie 1)

**I – Relations de comparaison locale des fonctions**

- Notion de voisinage
- Relation de domination : définition, caractérisation par quotient, propriétés.
- Fonction négligeable devant une autre : définition, caractérisation par quotient, propriétés, comparaison des fonctions de références.
- Fonctions équivalentes : définition, caractérisation par quotient
  Propriétés : symétrie, transitivité, compatibilité avec les opérations, substitution.
- Obtention d'équivalent par encadrement
- Équivalents et signe des expressions, liens entre équivalents et limites.
- Si $f$ dérivable en $a$ et si $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$.
- Équivalents de référence : A savoir démontrer **(*)**
  - cas des fonctions polynomiales
  - $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$
  - $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
  - $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - $\ln(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$
  - Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé** : $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$
  - $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - $\arccos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$

### • Utilisation des matrices en algèbre linéaire

**I – Matrices représentatives**

- Matrices représentatives d'un vecteur, d'une famille de vecteur, d'une application linéaire dans des bases données.

**II – Opérations sur les matrices représentatives**

- Combinaisons linéaires de matrices représentatives d'applications linéaires, isomorphisme entre $\mathcal{L}$(E, F) et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où dim E = p et dim F = n, dimension de $\mathcal{L}$(E, F).
- Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
- Produit de matrices représentatives d'applications linéaires, lien entre applications linéaires bijectives et matrices inversibles.

## NOUVEAU COURS :

### • Utilisation des matrices en algèbre linéaire

**III – Changement de bases**

- Matrices de passage entre deux bases : $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$, les matrices de passages sont inversibles.
- Effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur et sur une matrice d'application linéaire.
- Définition de matrices semblables, cartérisation : elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

**IV – Rang d'une matrice**

- Définition, propriétés, caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang.
- Lien avec le rang d'une application linéaire.
- Multiplier une matrice par une matrice inversible ne change pas son rang.
- Les OEL et les OEC conservent le rang.
- Le rang d'une matrice est invariant par transposition.

**(*)** Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 28 : Déterminants

Déroulement d'une colle

1. Éventuellement une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Un calcul de limite avec utilisation d'équivalents
3. Exercice(s) au choix de l'interrogateur.

Un cours non connu entraine une note < 10

# Semaine de colles n°27 du 19/05/25 au 23/05/25 - Exercices à savoir refaire

## Pas de liste d'exercices à savoir refaire sur le Chap. 22

Il faut savoir calculer des limites avec utilisation d'équivalents.

## Exercices Chap. 23

### Révisions :

- Revoir le calcul de l'inverse d'une matrice
- Revoir les méthodes pour calculer les puissances d'une matrice

**Exercice fait dans le cours :** ***(*)***

On considère $u = (1, 2, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (-1, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$.

On pose : $F = \text{Vect}(u, v)$ et $G = \text{Vect}(w)$

**1.** Montrer que : $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire pour F et G ?

**2.** Déterminer la matrice représentative de la symétrie $s$ par rapport à F, parallèlement à G, relativement à la base $(u, v, w)$.

**3.** En utilisant la formule de changement de bases, déterminer la matrice de $s$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**4.** Comment retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser la formule de changement de bases ?

**Exercice 3 :**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 5 \\ a & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer le rang de $f$, une base de son image et une base de son noyau.

**Exercice 13 :**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**1.** Soit $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**2.** Déterminer la matrice, notée $M(f, \mathcal{F})$, de $f$ dans la base $\mathcal{F}$.

**3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $M(f^n, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 14 :**

Soit $f$ un endomorphisme de E de dimension $n$. On suppose que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $f^2 - 3f + 2.\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

**1.** Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = ax$. Montrer que $a \in \{1, 2\}$.

Rq. On dit alors que $a$ est une <u>*valeur propre* de $f$</u> et que $x$ est un <u>*vecteur propre* de $f$</u> associé à la valeur propre $a$.

**2.** Montrer que $\text{Ker}(f - 2\,\text{id}_E)$ et $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

**3.** En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale.