Septième devoir surveillé

le 23 mars 2024, de 8h30 à 11h30

La calculatrice est interdite. La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

I Restitution

I.1 Étudier la monotonie, puis la limite éventuelle, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

I.2 Démontrer que, pour tout λ réel, $\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\lambda}$.

I.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Énoncer puis démontrer le $DL_{2n}(0)$ de la fonction Arctan.

I.4 Donner, en justifiant, les dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

II Développements limités

II.1 Calculer le $DL_3(2)$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

II.2 Calculer le $DL_4(0)$ de la fonction $g : x \mapsto \ln\big(1+\operatorname{ch}(x)\big)$.

II.3 Calculer un équivalent et la limite en 0^+ de $h : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\cos x} - 1 + \frac{1}{4}x^2}{\tan(x^2)\left(\sqrt[3]{\operatorname{ch}(x)} - 1\right)}$.

III Espaces vectoriels

Les questions suivantes sont indépendantes.

III.1 Soient u, v des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

– **a)** Montrer que $\operatorname{Vect}(u,v) = \operatorname{Vect}(u+v,\ u-v)$.

– **b)** Montrer que si la famille (u,v) est libre, alors $(u+v,\ u-v)$ est libre aussi.

III.2 On pose $E_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a-b & -a \\ b & a+b \end{smallmatrix} \right) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $E_2 = \{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^\top = M \}$.

– **a)** Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, en donner une base.

– **b)** Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer sa dimension.

– **c)** Déterminer une base de $E_1 \cap E_2$ puis la compléter en une base de E_2.

III.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G, H des sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$F + G = E, \quad G \subset H \quad \text{et} \quad H \cap F = \{0_E\}.$$

Démonter que $G = H$.

IV Analyse asymptotique

À tout entier $n \geqslant 1$, on associe la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + e^x} + nx.$$

On note Γ_n la courbe représentative de f_n.

IV.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

– **a)** Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

– **b)** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe Γ_n en 0, ainsi que la position relative de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

IV.2 Étude d'une suite.

– **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$, que l'on notera x_n dans le reste de l'exercice, et telle que

$$-\frac{1}{n} < x_n < 0.$$

– **b)** Montrer que la suite (x_n) est convergente, puis que $x_n \underset{n \to \infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

– **c)** Montrer que $\dfrac{1}{2} + nx_n = \dfrac{x_n}{4} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

– **d)** En déduire deux réels a, b tels que $x_n = -\dfrac{1}{2n} + \dfrac{a}{n^2} + \dfrac{b}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

V Problème

L'objet du problème est d'étudier une variante de la notion de famille génératrice qui possède des applications dans les domaines de l'optimisation, de la robotique, etc.

Définition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$. Une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de E sera dite PG (positivement génératrice) lorsque :

$$\boxed{\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p, \quad x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k.}$$

Autrement dit, on ne tient compte que des combinaisons linéaires à coefficients *positifs*.

V.1 Exemples

V.1 On pose $E_1 = \mathbb{R}^2$ et on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1,1), \quad u_2 = (-1,0), \quad u_3 = (0,-1).$$

– **a)** Montrer que (u_1, u_2) n'est *pas* une famille PG de E_1.

– **b)** Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille PG de E_1.

V.2 On pose $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P'(0)\}$ et on considère les polynômes :

$$P_1 = X^2 + X + 1, \quad P_2 = X^2 - X - 1, \quad P_3 = -2X^2 + X + 1.$$

– **a)** Montrer que $E_2 = \text{Vect}\left(X^2,\ X+1\right)$.

– **b)** Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une famille PG de E_2.

V.2 Propriétés générales

V.3 Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille PG de E.

– **a)** Justifier que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice (au sens usuel) de E.

– **b)** Montrer que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille liée.

V.4 On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

– **a)** Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille PG de E. Montrer que $p \geqslant n+1$.

– **b)** Soit $(v_1, \dots v_p)$ une famille génératrice (au sens usuel) de E, et $v_{p+1} = -\sum_{i=1}^{p} e_i$.
Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_p, v_{p+1})$ est une famille positivement génératrice de E.

– **c)** Quel est le nombre minimal d'éléments d'une famille PG de E ? Justifier.

V.3 Extraction de sous-famille

On suppose, dans toute cette partie, que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et on s'intéresse au théorème suivant.

> **Théorème.** De toute famille PG de E, on peut extraire une sous-famille PG constituée d'au plus $2n$ éléments.

V.5 Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille suivante est PG, mais qu'elle n'admet aucune sous-famille stricte PG : $(e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_n, -e_n)$.

On se donne $(u_1, \dots, u_p)$ une famille PG de E, avec $p \geqslant 2n + 1$.

V.6 Montrer qu'il existe $I \subset [\![1, p]\!]$ tel que $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E.

V.7 On pose $J = [\![1, p]\!] \setminus I$. Montrer que la famille $(u_j)_{j \in J}$ est liée.

V.8 On pose $x_0 = -\sum_{i \in I} x_i$.

– **a)** Montrer qu'il existe $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, une famille de réels positifs, et $(\lambda_j)_{j \in J}$, une famille de réels non tous nuls, telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_0 = \sum_{i \in I} \alpha_i u_i + \sum_{j \in J} (\alpha_j + t\lambda_j) u_j.$$

– **b)** Montrer qu'il existe $k \in J$ et $(\beta_j)_{j \in J \setminus \{k\}}$, une famille de réels positifs, tels que :

$$x_0 = \sum_{i \in I} \alpha_i u_i + \sum_{j \in J \setminus \{k\}} \beta_j u_j.$$

Indication : choisir judicieusement la valeur du réel t.

– **c)** Montrer que $(u_i)_{i \in [\![1,p]\!] \setminus \{k\}}$ est une famille PG de E.

V.9 Démontrer le théorème à l'aide des résultats précédents.