Septième devoir surveillé

Solutions

I Restitution

I.1 Étudier la monotonie, puis la limite éventuelle, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

Solution. Voir DS 5.

I.2 Démontrer que, pour tout λ réel, $\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^\lambda$.

Solution. Voir DS 5.

I.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Énoncer puis démontrer le $DL_{2n}(0)$ de la fonction Arctan.

Solution. Le $DL_{2n}(0)$ est : $\operatorname{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n})$.

Pour le démontrer on part du $DL_{2n}(0)$ suivant, obtenu par substitution :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k (x^2)^k + o(x^{2n}),$$

On en déduit alors le $DL_{2n+1}(0)$ d'Arctan par primitivation :

$$\operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}(0) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}),$$

puis on conclut par troncature à l'ordre $2n$.

I.4 Donner, en justifiant, les dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

Solution. $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ car on dispose de la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ formée des vecteurs $e_i = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$. De même $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$ car on dispose de la base canonique $(E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ formée des matrices élémentaires. Enfin $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$ car on dispose de la base canonique $(X^0, X^1, \ldots, X^n)$.

II Développements limités

II.1 Calculer le $DL_3(2)$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

Solution. On se ramène à un DL_3 avec $u \to 0$ en notant $u = x - 2$:

$$\begin{aligned} f(x) = f(2+u) = \frac{1}{\sqrt{4+u}} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{u}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{4}\right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\left(\frac{u}{4}\right)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\left(\frac{u}{4}\right)^3 + o\left(u^3\right)\right] \\ &= \boxed{\frac{1}{2} - \frac{u}{16} + \frac{3u^2}{256} - \frac{5u^3}{2048} + o(u^3).} \end{aligned}$$

On conclut finalement par substitution $u = x - 2$.

II.2 Calculer le $DL_4(0)$ de la fonction $g : x \mapsto \ln\big(1 + \mathrm{ch}(x)\big)$.

Solution. On part du $DL_4(0)$ usuel : $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$. Puisque $1 + \mathrm{ch}(0) = 2$, on factorise par 2 pour se ramener à $\ln(1+u)$ avec $u \to 0$:

$$\begin{aligned} \ln(1 + \mathrm{ch}(x)) &= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)\right) \\ &= \ln(2) + u - \frac{u^2}{2} + o(u^2), \end{aligned}$$

où $u = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{48} = o(x^4)$ et $u^2 = u \times u = \dfrac{x^4}{16} + o(x^4)$ par produit. Finalement :

$$\boxed{\ln(1 + \mathrm{ch}(x)) = \ln(2) + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^4).}$$

II.3 Calculer un équivalent et la limite en 0^+ de $h : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\cos x} - 1 + \frac{1}{4}x^2}{\tan(x^2)\left(\sqrt[3]{\mathrm{ch}(x)} - 1\right)}$.

Solution. Le dénominateur est équivalent à $\dfrac{x^4}{6}$ par produit cat :

$$\tan(x^2) \sim x^2 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{\operatorname{ch} x} - 1 = \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

On procède alors à un $DL_4(0)$ au numérateur :

$$\sqrt{\cos x} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En composant avec $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + o(u^2)$, il vient :

$$\sqrt{\cos x} - 1 + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^4}{96} + o(x^4), \quad \text{d'où} \quad h(x) \sim \frac{-\frac{x^4}{96}}{\frac{x^4}{6}} \sim -\frac{1}{16}.$$

Deux fonctions équivalentes ayant même limite, $\boxed{h(x) \to -\dfrac{1}{16}}$.

III Espaces vectoriels

Les questions suivantes sont indépendantes.

III.1 Soient u, v des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

– **a)** Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u + v,\ u - v)$.

Solution. Raisonnons par double inclusion. $\mathrm{Vect}(u, v)$ est un s.e.v. qui contient $u + v$ et $u - v$, donc $\mathrm{Vect}(u + v, u - v) \subset \mathrm{Vect}(u, v)$ par propriété de minimalité. Réciproquement $u = \frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{2}(u - v)$ et $v = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{1}{2}(u - v)$, donc $\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathrm{Vect}(u + v, u - v)$ aussi.

– **b)** Montrer que si la famille (u, v) est libre, alors $(u + v,\ u - v)$ est libre aussi.

Solution. Supposons que (u, v) est une famille libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda(u + v) + \mu(u - v) = 0_E.$$

Alors $(\lambda+\mu)u+(\lambda-\mu)v=0_E$. Par liberté de (u,v), on obtient donc le système :

$$\begin{cases} \lambda+\mu=0 \\ \lambda-\mu=0 \end{cases}.$$

Nécessairement $\lambda=0$ (par L_1+L_2) puis $\mu=0$, donc $(u+v,u-v)$ est libre.

Remarque. La réciproque est vraie aussi, mais non demandée.

III.2 On pose $E_1=\left\{\left(\begin{smallmatrix} a-b & -a \\ b & a+b \end{smallmatrix}\right) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ et $E_2=\{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^\top=M\}$.

– **a)** Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, en donner une base.

Solution. Soit $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :

$$M\in E_1 \iff \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ M=a\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)+b\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Ainsi, $E_1=\mathrm{Vect}(U_1,U_2)$ où $U_1=\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $U_2=\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. C'est en particulier un s.e.v. de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dont la famille (U_1,U_2) est génératrice. Les matrices U_1 et U_2 ne sont pas colinéaires, donc la famille (U_1,U_2) est libre aussi : c'est une base de E_1.

– **b)** Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer sa dimension.

Solution. Les éléments de E_2 sont les matrices symétriques : soit $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

$$M\in E_2 \iff M^\top=M \iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ M=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right).$$

En posant $V_1=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $V_2=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $V_3=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on en déduit que E_2 est le s.e.v. engendré par la famille (V_1,V_2,V_3). Il s'agit même d'une base par unicité de la décomposition. Donc $\dim E_2=3$.

– **c)** Déterminer une base de $E_1\cap E_2$ puis la compléter en une base de E_2.

Solution. Étant donné $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} M\in E_1\cap E_2 &\iff \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ M=\left(\begin{smallmatrix} a-b & -a \\ b & a+b \end{smallmatrix}\right) \text{ et } -a=b \\ &\iff \exists a\in\mathbb{R},\ M=\left(\begin{smallmatrix} 2a & -a \\ -a & 0 \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

En posant $W_1=\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, non nulle, la famille (W_1) est donc une base de $E_1\cap E_2$. On complète en une base de E_2 à l'aide de la famille génératrice (V_1,V_2,V_3) :

- $V_1\notin\mathrm{Vect}(W_1)$ donc (V_1,W_1) est libre ;

- $V_2 \in \text{Vect}(W_1, V_1)$ car $V_2 = 2V_1 - W_1$ donc $\text{Vect}(V_1, V_2) \subset \text{Vect}(W_1, V_1)$;
- $V_3 \notin \text{Vect}(W_1, V_1)$ car sinon V_3 aurait un coefficient nul en $(2, 2)$.

Finalement, la base complétée est donc (W_1, V_1, V_3).

III.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G, H des sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$F + G = E, \quad G \subset H \quad \text{et} \quad H \cap F = \{0_E\}.$$

Démonter que $G = H$.

Solution. Par double inclusion, il suffit de montrer que $H \subset G$.
Soit $x \in H$. Comme $x \in E$ en particulier, il existe $(u, v) \in F \times G$ tel que $x = u + v$.
D'une part $u \in F$. D'autre part $u \in H$ car $u = x - v$, où $x \in H$ et $v \in G \subset H$.
Comme $H \cap F = \{0_E\}$, il vient $u = 0_E$. Donc $x = v \in G$.

IV Analyse asymptotique

À tout entier $n \geqslant 1$, on associe la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + e^x} + nx.$$

On note Γ_n la courbe représentative de f_n.

IV.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

– **a)** Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Solution. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \frac{-e^x}{(1 + e^x)^2} + n \quad \text{où} \quad \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} < 1.$$

On en déduit que $f_n' > n - 1 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc f_n est strictement croissante.

– **b)** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe Γ_n en 0, ainsi que la position relative de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Solution. Puisque $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f_n'(0) = -\dfrac{1}{4} + n$, l'équation de la tangente en 0 est : $y = \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{4}\right) x$. On effectue un $DL(0)$ pour étudier la position relative :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right]^{-1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3),\end{aligned}$$

d'où $f_n(x) - \frac{1}{2} - \left(n - \frac{1}{4}\right) x \sim \frac{x^3}{48}$. Par équivalence, ces deux expressions sont de même signe au voisinage de 0 :

- la courbe est au-dessous de la tangente pour $x < 0$,
- la courbe est au-dessus de la tangente pour $x > 0$.

IV.2 Étude d'une suite.

– **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$, que l'on notera x_n dans le reste de l'exercice, et telle que

$$-\frac{1}{n} < x_n < 0.$$

Solution. La fonction f_n est strictement monotone, donc injective. L'équation admet donc au plus une solution. En outre, f_n est une fonction continue qui vérifie :

$$f_n(0) = \frac{1}{2} > 0, \qquad f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+e^{-1/n}} - 1 < 0.$$

Par théorème des valeurs intermédiaires, $f_n(x) = 0$ admet au moins une solution sur le segment $\left[-\frac{1}{n}, 0\right]$. Par encadrement strict, celle-ci est distincte de 0 et $-\frac{1}{n}$.

– **b)** Montrer que la suite (x_n) est convergente, puis que $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Solution. Comme $-\frac{1}{n} \to 0$, la suite (x_n) est convergente et de limite 0 par théorème d'encadrement. La relation $f_n(x_n) = 0$ entraîne alors, par continuité,

$$nx_n = -\frac{1}{1+e^{x_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{2} \qquad \text{d'où} \quad x_n \sim -\frac{1}{2n}.$$

– **c)** Montrer que $\dfrac{1}{2} + nx_n = \dfrac{x_n}{4} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Solution. La relation $f_n(x_n) = 0$ équivaut à : $\frac{1}{2} + nx_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{x_n}}$.
Le DL établi précédemment donne par ailleurs :

$$\frac{1}{1+e^x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + o(x^2).$$

On en déduit le résultat par substitution $x = x_n$ avec $x_n \to 0$.

– **d)** En déduire deux réels a, b tels que $x_n = -\dfrac{1}{2n} + \dfrac{a}{n^2} + \dfrac{b}{n^3} + o(\dfrac{1}{n^3})$.

Solution. L'équivalent $x_n \sim -\dfrac{1}{2n}$ se traduit par $x_n = -\dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})$. En injectant ceci dans le développement de la question précédente, on obtient déjà :

$$\frac{1}{2} + nx_n = -\frac{1}{8n} + o(\frac{1}{n}), \quad \text{d'où} \quad x_n = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

On peut alors réinjecter dans le développement :

$$\frac{1}{2} + nx_n = -\frac{1}{8n} - \frac{1}{32n^2} + o(\frac{1}{n^2}),$$

ce qui conduit au résultat voulu, avec $a = -\dfrac{1}{8}$ et $b = -\dfrac{1}{32}$.

V Problème

L'objet du problème est d'étudier une variante de la notion de famille génératrice qui possède des applications dans les domaines de l'optimisation, de la robotique, etc.

Définition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$. Une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de E sera dite PG (positivement génératrice) lorsque :

$$\boxed{\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p, \quad x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k.}$$

Autrement dit, on ne tient compte que des combinaisons linéaires à coefficients *positifs*.

V.A Exemples

V.1 On pose $E_1 = \mathbb{R}^2$ et on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1,1), \quad u_2 = (-1,0), \quad u_3 = (0,-1).$$

– **a)** Montrer que (u_1, u_2) n'est *pas* une famille PG de E_1.

Solution. Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $u_3 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. Ceci équivaut à $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = -1$, d'où une contradiction car $\lambda_1 \geqslant 0$. Il n'existe donc pas de telle décomposition de u_3. A fortiori, la famille (u_1, u_2) n'est pas PG.

– **b)** Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille PG de E_1.

Solution. Il faut montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ (x,y) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, $\quad (x,y) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = x \\ \lambda_1 - \lambda_3 = y \end{cases}$.
Les solutions dans $\mathbb{R}^3$ sont les triplets $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\alpha,\ \alpha - x,\ \alpha - y)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. En posant $\alpha = \max\{0, x, y\}$, on obtient une solution dans $(\mathbb{R}_+)^3$.

V.2 On pose $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P'(0)\}$ et on considère les polynômes :

$$P_1 = X^2 + X + 1, \quad P_2 = X^2 - X - 1, \quad P_3 = -2X^2 + X + 1.$$

– **a)** Montrer que $E_2 = \operatorname{Vect}\left(X^2,\ X+1\right)$.

Solution. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. En notant $P = aX^2 + bX + c$,

$$P \in E_2 \iff P(0) = P'(0) \iff c = b \iff P = aX^2 + b(X+1).$$

Donc $E_2 = \operatorname{Vect}(X^2, X+1)$.

– **b)** Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une famille PG de E_2.

Solution. Ces polynômes P_1, P_2, P_3 appartiennent à E_2. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^2$. Par unicité des coefficients d'un polynôme :

$$aX^2 + b(X+1) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = a \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = b \end{cases}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}^3$ sont tous les triplets $\left(\frac{a+b+\lambda}{2}, \frac{a-b+3\lambda}{2}, \lambda\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Ceci donne une solution dans $(\mathbb{R}_+)^3$ si on pose, par exemple, $\lambda = \max\{|a+b|, |a-b|\}$.

V.B Propriétés générales

V.3 Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille PG de E.

– **a)** Justifier que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice (au sens usuel) de E.

Solution. Toute combinaison linéaire à coefficients positifs est aussi une combinaison linéaire à coefficients réels.

– **b)** Montrer que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille liée.

Solution. Soit $x \in E$ non nul. Il existe $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ familles de réels positifs, telles que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ et $-x = \sum_{i=1}^{p} \mu_i u_i$. Par somme $0_E = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \mu_i) u_i$. Puisque $x \neq 0$, il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $\lambda_i > 0$; alors $\lambda_i + \mu_i > 0$ aussi car $\mu_i \geqslant 0$. Les coefficients $(\lambda_i + \mu_i)$ ne sont donc pas tous nuls.

V.4 On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

– **a)** Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille PG de E. Montrer que $p \geqslant n+1$.

Solution. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice de E avec $\dim E = n$, donc :

$$n = \operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_p) \leqslant p.$$

Si on avait $n = p$, la famille génératrice $(u_1, \ldots, u_p)$ serait une base par caractérisation en dimension finie. C'est absurde car elle est liée, donc $n \leqslant p - 1$.

– **b)** Soit $(v_1, \ldots v_p)$ une famille génératrice (au sens usuel) de E, et $v_{p+1} = -\sum_{i=1}^{p} v_i$. Montrer que la famille $(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1})$ est une famille PG de E.

Solution. Soit $x \in E$. La famille est génératrice donc il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$. Mais alors, par définition du vecteur v_{p+1},

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + t) v_i + t\, v_{p+1} = x.$$

Posons $t = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_p|\}$, de sorte que : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i + t \geqslant \lambda_i + |\lambda_i| \geqslant 0$.
Ceci donne une décomposition de x en combinaison linéaire à coefficients positifs.

– **c)** Quel est le nombre minimal d'éléments d'une famille PG de E ? Justifier.

Solution. On a vu que toute famille PG $(u_1, \dots, u_p)$ vérifie $p \geqslant n+1$. Or, la construction précédente permet de construire $(v_1, \dots, v_{n+1})$ en partant d'une base quelconque $(v_1, \dots, v_n)$ de E. Conclusion : le nombre minimal d'éléments est $n+1$.

V.C Extraction de sous-famille

On suppose, dans toute cette partie, que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et on s'intéresse au théorème suivant.

> **Théorème.** De toute famille PG de E, on peut extraire une sous-famille PG constituée d'au plus $2n$ éléments.

V.5 Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille suivante est PG, mais qu'elle n'admet aucune sous-famille stricte PG : $(e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_n, -e_n)$.

Solution. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Les réels $|x_i| + x_i$ et $|x_i| - x_i$ sont tous positifs pour $i \in [\![1, n]\!]$ et conduisent à la décomposition suivante :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i| + x_i}{2}\, e_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i| - x_i}{2}\, (-e_i).$$

Donc cette famille est bien PG.
Considérons maintenant la sous-famille obtenue en retirant le vecteur e_1. Quels que soient les réels positifs $(\lambda_i)_{2 \leqslant i \leqslant n}$ et $(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on ne peut pas reconstruire e_1 car :

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_i\, e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, (-e_i) = (0 - \mu_1,\ \lambda_2 - \mu_2,\ \dots,\ \lambda_n - \mu_n) \neq (1, 0, \dots, 0).$$

Cette sous-famille de $2n-1$ éléments n'est donc pas PG. Le même raisonnement s'applique quel que soit le (ou les vecteurs) que l'on retire.

On se donne maintenant $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille PG de E, avec $p \geqslant 2n+1$.

V.6 Montrer qu'il existe $I \subset [\![1, p]\!]$ tel que $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E.

Solution. La famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice, donc on peut directement lui appliquer le théorème de la base extraite.

V.7 On pose $J = [\![1, p]\!] \setminus I$. Montrer que la famille $(u_j)_{j \in J}$ est liée.

Solution. Cette famille est constituée de $p-n$ vecteurs, avec $p-n \geqslant n+1$. Or $\dim E = n$, donc cette famille est nécessairement liée.

V.8 On pose $x_0 = -\sum_{i \in I} x_i$.

– **a)** Montrer qu'il existe $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, une famille de réels positifs, et $(\lambda_j)_{j \in J}$, une famille de réels non tous nuls, telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_0 = \sum_{i \in I} \alpha_i u_i + \sum_{j \in J} (\alpha_j + t\lambda_j) u_j.$$

Solution. Attention, faute de frappe manifeste : il fallait comprendre $x_0 = -\sum_{i \in I} u_i$.
La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est PG donc on dispose de réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tels que :

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i = \sum_{i \in I} \alpha_i u_i + \sum_{j \in J} \alpha_j u_j.$$

En outre, $(u_j)_{j \in J}$ est liée donc on dispose aussi d'une famille de réels $(\lambda_j)_{j \in J}$, non nulle, telle que :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j u_j = 0.$$

Le résultat demandé s'ensuit par linéarité de la sommation.

– **b)** Montrer qu'il existe $k \in J$ et $(\beta_j)_{j \in J \setminus \{k\}}$, une famille de réels positifs, tels que :

$$x_0 = \sum_{i \in I} \alpha_i u_i + \sum_{j \in J \setminus \{k\}} \beta_j u_j.$$

Indication : choisir judicieusement la valeur du réel t.

Solution. La famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ est non nulle. Posons J' l'ensemble des $j \in J$ tels que $\lambda_j \neq 0$. Pour tout $j \in J'$, la fonction $t \mapsto \alpha_j + \lambda_j t$ est strictement monotone et s'annule en un unique réel $t_j = -\frac{\alpha_j}{\lambda_j}$. On dispose d'un élément $k \in J'$ tel que $|t_k| = \min\limits_{j\in J'} |t_j|$. En posant $t = t_k$, on aura alors $\alpha_k + \lambda_k t = 0$. De plus :

$$\forall j \in J', \quad \alpha_j + \lambda_j t \geqslant \alpha_j - |\lambda_j t| \geqslant 0 \quad \text{car } |\lambda_j|\,|t| \leqslant |\lambda_j|\,|t_j| = \alpha_j.$$

Lorsque $j \in J \setminus J'$, on aura $\alpha_j + \lambda_j t = \alpha_j$. On peut donc poser dans tous les cas $\beta_j = \alpha_j + \lambda_j t$ pour $j \in J$. Ces réels sont tous positifs et $\beta_k = 0$, d'où le résultat.

– **c)** Montrer que $(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}}$ est une famille PG de E.

Solution. D'après le raisonnement de la question **4b**, tout élément de E est positivement engendré par la famille constituée des u_i pour $i \in I$ et de x_0. Or, en **8b**, on vient de voir que x_0 est lui-même positivement engendré par les u_i pour $i \in [\![1,p]\!] \setminus \{k\}$. Par composition des combinaisons linéaires, tout élément de E est donc positivement engendré par la famille $(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}}$.

V.9 Démontrer le théorème à l'aide des résultats précédents.

Solution. Soit $(u_1, \ldots, u_m)$ une famille PG de E. Posons alors $p \in [\![1,m]\!]$ le nombre minimal d'éléments d'une sous-famille PG de $(u_1, \ldots, u_m)$. Quitte à réindexer, on peut supposer que la sous-famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est PG. La construction des questions **6** à **8c** montre alors que : si $p \geqslant 2n+1$, il existe une sous-famille PG avec seulement $p-1$ éléments (ce qui contredit la minimalité de p). Par contraposée, on en déduit que $p < 2n+1$, c'est-à-dire que $p \leqslant 2n$.