Huitième devoir surveillé

Solutions

I Exercice

Soient un entier $n \geqslant 1$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $3n$.
On considère un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang $2n$.

I.1 Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker} f$.

> **Solution.** D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f = n$.

On pose $g = f|_{\operatorname{Im} f}$ l'application linéaire de $\operatorname{Im} f$ dans E définie par restriction de f au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$.

I.2 Montrer que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f^2$ et que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.

> **Solution.** Pour tout $x \in E$,
>
> $$y \in \operatorname{Im} g \iff \exists x \in \operatorname{Im} f,\ y = f(x) \iff \exists a \in E,\ y = f^2(x) \iff y \in \operatorname{Im} f^2.$$
>
> De même, par restriction de l'application f,
>
> $$x \in \operatorname{Ker} g \iff x \in \operatorname{Im} f \text{ et } g(x) = 0 \iff x \in \operatorname{Im} f \text{ et } f(x) = 0.$$

I.3 En déduire que $\operatorname{rg} f^2 \geqslant n$.

> **Solution.** L'égalité $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} g$ donne directement $\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} g$ par passage aux dimensions. Or $\operatorname{rg} g = \dim E - \dim(\operatorname{Ker} g)$ d'après le théorème du rang, donc :
>
> $$\operatorname{rg} f^2 = 3n - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f).$$
>
> Par inclusion, $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) \leqslant \dim(\operatorname{Im} f)$. On obtient finalement $\operatorname{rg} f^2 \geqslant 3n - 2n$ par hypothèse sur $\operatorname{rg} f$.

I.4 *On suppose désormais que $f^3 = 0$ dans $\mathscr{L}(E)$.*

– **a)** Comparer les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f^2$ et $\operatorname{Ker} f$, puis déterminer $\operatorname{rg} f^2$.

Solution. Pour tout $x \in E$, il existe $a \in E$ tel que $x = f^2(a)$, d'où $f(x) = f^3(a) = 0$. Ceci montre que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$. En passant aux dimension, on obtient $\operatorname{rg} f^2 \leqslant n$ et donc $\operatorname{rg} f^2 = n$ compte tenu de la question précédente. Finalement, $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Ker} f$ par cas d'égalité des dimensions.

– **b)** Montrer qu'il existe une famille libre $(u_1, \ldots, u_n)$ de E telle que

$$\operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = E.$$

Solution. On vient de voir que $\operatorname{Ker} f^2$ est de dimension $2n$, donc il admet un supplémentaire S de dimension $3n - 2n = n$ dans E. Il suffit alors de prendre pour $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de S.

– **c)** Montrer que la famille suivante est une base de E :

$$\big(u_1, \ldots, u_n, f(u_1), \ldots, f(u_n), f^2(u_1), \ldots, f^2(u_n)\big).$$

Solution. Notons $\mathcal{F}$ cette famille. Elle comporte $3n$ vecteurs, donc il lui suffit d'être libre pour être une base. Soient $(\alpha_i), (\beta_i)$ et (γ_i) trois familles de scalaires telles que :

$$\sum_{i=1}^{n} \big(\alpha_i u_i + \beta_i f(u_i) + \gamma_i f^2(u_i)\big) = 0. \qquad (\heartsuit)$$

En appliquant f^2, les f^3 s'annulent et on obtient par linéarité :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^2(u_i) = 0, \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in \operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_n).$$

Cette combinaison linéaire est donc nulle, ce qui entraîne que la famille (α_i) est nulle par liberté. En appliquant cette fois f à la relation $(\heartsuit)$, on obtient alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \in \operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_n),$$

donc la famille (β_i) est nulle aussi. En repartant à nouveau de la relation $(\heartsuit)$, on trouvre enfin que la famille (γ_i) est nulle. La famille $\mathcal{F}$ est bien libre.

II Exercice

Soit f une fonction continue de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_0^\pi \cos(t)f(t)\,dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \sin(t)f(t)\,dt = 0.$$

II.1 Montrer qu'il existe un élément $x_1 \in \,]0,\pi[$ tel que $f(x_1) = 0$.

Solution. Supposons que f ne s'annule pas sur $]0,\pi[$ et cherchons une contradiction. Cette fonction est continue donc $f(]0,\pi[)$ est un intervalle, ce qui donne alors $f > 0$ sur $]0,\pi[$ ou $f < 0$ sur $]0,\pi[$. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que $f > 0$. La fonction $g : t \mapsto \sin(t)f(t)$ vérifie alors $g > 0$ sur $]0,\pi[$, mais aussi $g(0) \geqslant 0$ et $g(\pi) \geqslant 0$ par continuité. Donc g est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,\pi]$. Par cas d'égalité, g est nulle sur $[0,\pi]$, ce qui implique que f est nulle sur $]0,\pi[$. On conclut par l'absurde.

II.2 Déterminer, pour tout réel α, la valeur de l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_0^\pi \sin(t-\alpha)f(t)\,dt.$$

Solution. On trouve $I(\alpha) = 0$ quel que soit α, d'après la formule de duplication

$$\sin(t-\alpha) = \sin(t)\cos(\alpha) - \cos(t)\sin(\alpha)$$

et la linéarité de l'intégrale, compte tenu des hypothèses.

II.3 En déduire qu'il existe $x_2 \in \,]0,\pi[$, distinct de x_1, tel que $f(x_2) = 0$.

Solution. Supposons que f ne s'annule qu'en x_1 et cherchons une contradiction. On a déjà vu que f change nécessairement de signe. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que $f \leqslant 0$ sur $[0,x_1]$ et $f \geqslant 0$ sur $[x_1,\pi]$. La fonction $t \mapsto \sin(t-x_1)f(t)$ est continue et positive sur $[0,\pi]$ car $\sin \leqslant 0$ sur $[-x_1,0] \subset [-\pi,0]$ et $\sin \geqslant 0$ sur $[0,\pi-x_1] \subset [0,\pi]$. De plus $I(x_1) = 0$ d'après la question précédente, donc $\sin(t-x_1)f(t) = 0$ est nul pour tout $t \in [0,\pi]$. En particulier, $f(t) = 0$ pour tout $t \in \,]0,\pi[\, \setminus \{x_1\}$, ce qui contredit l'hypothèse.

III Exercice

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble $\mathcal{B}_n$ de toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \in \{0,1\}.$$

III.1 Quel est le cardinal de $\mathcal{B}_n$?

> **Solution.** Toute matrice $A \in \mathcal{B}_n$ est déterminée par le choix d'une application $(i,j) \mapsto a_{i,j}$ de $[\![1,n]\!]^2$ dans $\{0,1\}$. Donc :
>
> $$|\mathcal{B}_n| = \left|\{0,1\}^{[\![1,n]\!]^2}\right| = |\{0,1\}|^{|[\![1,n]\!]^2|} = 2^{(n^2)}.$$

III.2 Déterminer le cardinal de $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{S}_n$.

> **Solution.** Par symétrie, tout matrice $A \in \mathcal{B}_n \cap \mathcal{S}_n$ est déterminée par le choix des coefficients $a_{i,j}$ pour $i \leqslant j$ (partie triangulaire supérieure de la matrice). En effet $a_{i,j} = a_{j,i}$ si $i > j$. Cela revient donc à choisir une application de T dans $\{0,1\}$ où $T = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i \leqslant j\}$. On dénombre alors T en distinguant les cas selon la valeur de $j \in [\![1,n]\!]$. Pour j fixé, il reste à choisir $i \in [\![1,j]\!]$, ce qui laisse j possibilités. Par union disjointe,
>
> $$|T| = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{d'où} \quad |\mathcal{B}_n \cap \mathcal{S}_n| = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

III.3 Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des $A \in \mathcal{B}_n \cap \mathcal{S}_n$ telles que chaque ligne (et chaque colonne) contient un unique coefficient égal à 1. On note u_n le cardinal de $\mathcal{E}_n$, avec $u_0 = 1$ par convention.

– **a)** Déterminer u_1, u_2 et u_3.

> **Solution.** Trivialement $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$, ce qui correspond aux matrices
>
> $$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
>
> On trouve enfin $u_3 = 4$ par énumération de toutes les possibilités. On commence

par choisir la 1^{re} ligne, puis la 2^{e} et la 3^{e}, en respectant la contrainte de symétrie :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

– **b)** Soit $n \geqslant 2$. Déterminer, en fonction de u_{n-1} et u_{n-2},

- le nombre d'éléments $A \in \mathcal{E}_n$ tels que $a_{n,n} = 1$;

Solution. Une matrice $A \in \mathcal{E}_n$ telle que $a_{n,n} = 1$ est entièrement déterminée par le choix de la sous-matrice $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$ dans l'ensemble $\mathcal{E}_{n-1}$.

Il y a donc u_{n-1} possibilités pour choisir A.

- le nombre d'éléments $A \in \mathcal{E}_n$ tels que $a_{n,n} = 0$;

Solution. On raisonne ici par choix successifs : on choisit d'abord l'unique entier $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $a_{n+1,k} = 1$. La colonne k et la ligne k (par symétrie) de A sont alors déterminées. Il reste donc à choisir les coefficients $a_{i,j}$ pour $(i,j) \in ([\![1,n]\!] \setminus \{k, n+1\})^2$, ce qui équivaut au choix d'un élément de $\mathcal{E}_{n-2}$.

Au total, il y a donc $(n-1) \times u_{n-2}$ possibilités pour choisir A.

– **c)** En déduire la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n.$$

Solution. Par union disjointe, la question précédente donne :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}.$$

Cela correspond bien à la relation demandée après changement d'indice.

IV Exercice

Pour tout réel x, on pose :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 e^{-(1+u^2)x^2}\,\mathrm{d}u.$$

IV.1 Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. Posons $\varphi : x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction φ est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = e^{-x^2}.$$

En particulier, φ' est continue donc φ est de classe $\mathscr{C}^1$. De plus $f = \varphi^2$ donc f est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ par produit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\varphi'(x)\varphi(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

IV.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f'(x)$ sous la forme d'une intégrale puis vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x\,g(x).$$

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par le calcul précédent et linéarité de l'intégrale :

$$f'(x) = 2\int_0^x e^{-(x^2+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

En effectue alors le changement de variable $t = xu$ (avec $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$), d'où :

$$f'(x) = 2x\int_0^1 e^{-(x^2+x^2u^2)}\,\mathrm{d}u = 2x\,g(x).$$

L'idée générale dans les questions suivantes sera d'approcher $g(x)$ par des sommes puis, en intégrant, d'en déduire une approximation de $f(x)$ elle-même.

IV.3 À tout entier $n \geqslant 1$, on associe :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution. Ce sont des sommes de Riemann de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, continue sur $[0,1]$:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

IV.4 *Approximation de g.* À tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x, on associe :

$$g_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{-(1+(k/n)^2)x^2}.$$

– **a)** Soit un entier $n \geqslant 1$. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout réel x,

$$\frac{1}{n} e^{-(\frac{k}{n})^2 x^2} \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} e^{-(ux)^2} \, \mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{n} e^{-(\frac{k-1}{n})^2 x^2}$$

Solution. Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $u \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, on peut encadrer l'intégrande entre deux constantes, par décroissance :

$$e^{-(\frac{k}{n})^2 x^2} \leqslant e^{-u^2 x^2} \leqslant e^{-(\frac{k-1}{n})x^2}.$$

On conclut par croissance de l'intégrale sur cet intervalle de largeur $\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$.

– **b)** En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x :

$$g_n(x) \leqslant g(x) \leqslant g_n(x) + \frac{e^{-x^2}}{n}.$$

Solution. D'après la relation de Chasles et la question précédente,

$$\int_0^1 e^{-(1+u^2)x^2} \, \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n} e^{-x^2} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} e^{-u^2 x^2} \, \mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-x^2} e^{-(\frac{k-1}{n})^2 x^2} \right).$$

Cela donne, par changement d'indice $\ell = k - 1$:

$$g(x) \leqslant \frac{e^{-x^2}}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} e^{-(1+(\ell/n)^2)x^2} \leqslant \frac{e^{-x^2}}{n} + g_n(x).$$

La minoration s'obtient plus directement :

$$g(x) \geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-x^2} e^{-(\frac{k}{n})^2 x^2} \right) = g_n(x).$$

IV.5 *Approximation de f.* Soit x un réel positif. À tout entier $n \geqslant 1$, on associe :

$$f_n(x) = \int_0^x 2t g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

– **a)** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \int_0^x 2t\,|g(t) - g_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f_n(x) - S_n| \leqslant e^{-x^2}.$$

Solution. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$. Par théorème fondamental de l'analyse :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x 2t\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il vient alors, par linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|\int_0^x (2tg(t) - 2tg_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x 2t\,|g(t) - g_n(t)|\,\mathrm{d}t.$$

L'encadrement précédent donne $|g(t) - g_n(t)| \leqslant \frac{1}{n} e^{-t^2}$ pour tout t appartenant au segment $[0, x]$. Par croissance de l'intégrale, $|f(x) - f_n(x)|$ est donc majoré par :

$$\frac{1}{n}\int_0^x 2te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1 - e^{-x^2}}{n},$$

d'où la première inégalité.
Pour la deuxième, on développe déjà $f_n(x)$ en calculant l'intégrale :

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^x 2te^{-(1+(k/n)^2)t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1 - e^{-(1+(k/n)^2)x^2}}{1 + (k/n)^2}.$$

On obtient donc par différence :

$$|f_n(x) - S_n| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-(1+(k/n)^2)x^2}}{1 + (k/n)^2} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-x^2}}{1 + 0} = e^{-x^2}.$$

– **b)** En déduire que, pour tout réel positif x,

$$\left|f(x) - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant e^{-x^2}.$$

Solution. Soit x un positif. Considérons les deux inégalités précédentes. La première inégalité montre déjà, par encadrement, que :

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x), \quad \text{d'où} \quad f_n(x) - S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) - \frac{\pi}{4}.$$

On peut passer aux valeurs absolues dans cette convergence (la fonction $x \mapsto |x|$ est continue). On conclut alors par passage à la limite dans la deuxième inégalité.

IV.6 Calculer finalement la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Solution. Comme $e^{-x^2} \to 0$ en $+\infty$, la question précédente montre, par encadrement, que $f(x) \to \frac{\pi}{4}$ en $+\infty$. Par passage à la racine carrée (continue) :

$$\left|\int_{0}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pour x positif, cette intégrale est positive. Enfin, par parité de $t \mapsto e^{-t^2}$:

$$\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sqrt{\pi}.$$

V Exercice

Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

V.1 On suppose dans cette question que $I_n \notin \mathcal{H}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^2 = 0$.

– **a)** Justifier qu'il existe $H \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ uniques tels que $M = H + \lambda I_n$.

Solution. On sait que $\mathcal{H}$ est un hyperplan et $I_n \notin \mathcal{H}$, donc :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{H} \oplus \mathrm{Vect}(I_n).$$

Toute matrice admet donc une unique décomposition de la forme voulue.

– **b)** Montrer que $M \in \mathcal{H}$ si, et seulement si, H n'est pas inversible.

Solution. Raisonnons par disjonction de cas :

- Supposons que $M \in \mathcal{H}$. Alors $H = M$ et $\lambda = 0$ par unicité de la décomposition. Alors $H^2 = 0$, qui n'est pas inversible, donc H n'est pas inversible non plus.
- Supposons que $M \notin \mathcal{H}$. Alors $\lambda \neq 0$. La relation $M^2 = 0$ se traduit par $H^2 + 2\lambda H + \lambda^2 I_n = 0$ car H commute avec λI_n, ce qui donne :

$$I_n = -\frac{1}{\lambda^2}\left(H^2 + 2\lambda H\right) = -\frac{1}{\lambda^2}\left(H + 2\lambda I_n\right) H.$$

  Par théorème, H est donc inversible avec $H^{-1} = -\dfrac{1}{\lambda^2}(H + 2\lambda I_n)$.

V.2 En déduire que $\mathcal{H}$ contient au moins une matrice inversible.

Solution. Raisonnons par l'absurde en supposant que l'hyperplan $\mathcal{H}$ ne contient aucune matrice inversible. Alors $I_n \notin \mathcal{H}$ en particulier et, d'après la question précédente, toute matrice M telle que $M^2 = 0$ appartient nécessairement à $\mathcal{H}$. En particulier, $\mathcal{H}$ contient les matrices élémentaires $E_{i,j}$ avec $i \neq j$. Comme $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel, il contient aussi la somme de ces matrices :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$$

Il reste à montrer que cette matrice est inversible.

- Première méthode. On procède par opérations : $L_1 \leftarrow \frac{1}{n-1}(L_1 + \cdots + L_n)$, suivi de $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour i allant de 2 à n. La matrice obtenue est triangulaire supérieure, avec des coefficients 1 ou -1 sur la diagonale.
- Deuxième méthode. Le calcul de $(S + I_n)^2$ est immédiat et conduit à la relation $S^2 = (n-2)S + (n-1)I_n$, ce qui donne :

$$I_n = -\frac{1}{n-1}(S^2 - (n-2)S) = -\frac{1}{n-1}\left(S - (n-2)I_n\right) S.$$