Deuxième devoir surveillé

Solutions

I Mise en jambe

Q.1 Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ les équations trigonométriques

$$(E_1) : \quad \cos(2x) = \sin(x) \qquad \text{et} \qquad (E_2) : \quad \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}.$$

Solution.

- La relation $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ permet de ramener (E_1) à :

$$\begin{aligned} \cos(2x) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) &\iff 2x \equiv \tfrac{\pi}{2} - x \ [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv x - \tfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ &\iff x \equiv \tfrac{\pi}{6} \ [\tfrac{2\pi}{3}] \text{ ou } x \equiv -\tfrac{\pi}{2} \ [2\pi]. \end{aligned}$$

  Les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont donc : $\dfrac{\pi}{6}, \quad \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}, \quad \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{3} \quad \text{et} \quad \dfrac{3\pi}{2}$.

  Après simplification : $\boxed{\dfrac{\pi}{6}, \quad \dfrac{5\pi}{6}, \quad \dfrac{3\pi}{2}}$.

- Pour (E_2), on reconnaît une formule d'addition en divisant par 2 :

$$\begin{aligned} \cos(x)\frac{1}{2} + \sin(x)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{4}) \\ &\iff x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{4} \ [2\pi]. \end{aligned}$$

  Les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont donc : $\boxed{\dfrac{7\pi}{12}, \quad \dfrac{\pi}{12}}$.

Q.2 Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor + 1$.

Solution. Rappel : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lfloor t \rfloor \leqslant t < \lfloor t \rfloor + 1$.

- Ainsi, $\lfloor x/3 \rfloor \leqslant x/3$ et $\lfloor 2x/3 \rfloor \leqslant 2x/3$. Par somme $\lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor \leqslant x$ et donc $\lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1$ par transitivité.
  Comme ce sont des entiers, $\boxed{\lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor}$.
- De même $x/3 < \lfloor x/3 \rfloor + 1$ et $2x/3 < \lfloor 2x/3 \rfloor + 1$. Par somme $x < \lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor + 2$, et donc $\lfloor x \rfloor < \lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor + 2$ par transitivité.
  Comme ce sont des entiers, $\boxed{\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor + 1}$.

(b) Résoudre l'équation $\lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor$.

Solution. Notons $n = \lfloor x/3 \rfloor$ et $\epsilon = x/3 - n$, de telle sorte que $0 \leqslant \epsilon < 1$. Puisque $x/3 = n + \epsilon$, on peut déterminer les parties entières de $2x/3 = 2n + 2\epsilon$ et $x = 3n + 3\epsilon$ par disjonction de cas (intervalles ici) :

ϵ	0	1/3	1/2	2/3	1
$\lfloor x/3 \rfloor$	n	n	n	n	
$\lfloor 2x/3 \rfloor$	$2n$	$2n$	$2n+1$	$2n+1$	
$\lfloor x \rfloor$	$3n$	$3n+1$	$3n+1$	$3n+2$	

Ainsi : $\lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor \iff (1/3 \leqslant \epsilon < 1/2 \text{ ou } 2/3 \leqslant \epsilon < 1)$.

L'ensemble des solutions est : $\boxed{\left\{3(n+\epsilon) \mid n \in \mathbb{Z} \text{ et } \epsilon \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{2}{3}, 1\right[\right\}}$

II Des inégalités

On considère la fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Q.3 Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \; (x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y))$.

Solution. *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$. *Supposons* que $x \leqslant y$. Montrons que $f(x) \leqslant f(y)$:

$$f(x) - f(y) = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \leqslant 0$$

car $1 + x \geqslant 1 > 0$, $1 + y \geqslant 1 > 0$ et $x - y \leqslant 0$. Ainsi, $f(x) \leqslant f(y)$.

Remarque. Cette proposition traduit la croissance de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$. On pouvait donc aussi étudier le signe de sa dérivée f' sur cet intervalle :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \geqslant 0.$$

Q.4 Soient z_1, z_2 deux nombres *complexes*.

(a) [Question de cours] Démontrer l'inégalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Solution. On développe le carré :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= \overline{(z_1 + z_2)}(z_1 + z_2) \\ &= (\overline{z_1} + \overline{z_2})(z_1 + z_2) \\ &= \overline{z_1}z_1 + \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_1 + \overline{z_2}z_2 \\ &= |z_1|^2 + \underbrace{\overline{z_1}z_2 + \overline{\overline{z_1}z_2}}_{2\,\mathfrak{Re}(\overline{z_1}z_2)} + |z_2|^2. \end{aligned}$$

Or $\mathfrak{Re}(\overline{z_1}z_2) \leqslant |\overline{z_1}z_2|$ et $|\overline{z_1}z_2| = |\overline{z_1}|\,|z_2| = |z_1|\,|z_2|$, donc :

$$|z_1 + z_2|^2 \leqslant \underbrace{|z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2}_{(|z_1|+|z_2|)^2}.$$

On conclut alors par croissance de la fonction racine carrée.

(b) Établir alors l'encadrement :

$$\frac{|z_1 + z_2|}{1 + |z_1 + z_2|} \leqslant \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1| + |z_2|} \leqslant \frac{|z_1|}{1 + |z_1|} + \frac{|z_2|}{1 + |z_2|}.$$

Solution. Comme $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, il vient $f(|z_1 + z_2|) \leqslant f(|z_1| + |z_2|)$ d'après la question précédente, ce qui donne déjà l'inégalité de gauche.

Par ailleurs $|z_1| \geqslant 0$ et $|z_2| \geqslant 0$, donc :

$$\frac{|z_1|}{1 + |z_1| + |z_2|} \leqslant \frac{|z_1|}{1 + |z_1|} \qquad \text{et} \qquad \frac{|z_2|}{1 + |z_1| + |z_2|} \leqslant \frac{|z_2|}{1 + |z_2|},$$

d'où l'inégalité de droite en sommant terme à terme.

(c) Déterminer les $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que ces trois membres sont égaux.

Solution. Raisonnons par analyse-synthèse.

- *Analyse.* Soit (z_1, z_2) un couple tel que les trois membres sont égaux. D'après les inégalités précédentes, on a nécessairement :

$$\frac{|z_1|}{1+|z_1|+|z_2|} = \frac{|z_1|}{1+|z_1|} \qquad \text{et} \qquad \frac{|z_2|}{1+|z_1|+|z_2|} = \frac{|z_2|}{1+|z_2|},$$

  ce qui donne $|z_1||z_2| = 0$ après simplifications, d'où $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$.
- *Synthèse.* Soit (z_1, z_2) un couple tel que $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$.
  Si $z_1 = 0$, les trois membres sont égaux à $\dfrac{|z_2|}{1+|z_2|}$.
  Si $z_2 = 0$, les trois membres sont égaux à $\dfrac{|z_1|}{1+|z_1|}$.
- L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{\left\{(0,b) \mid b \in \mathbb{C}\right\} \cup \left\{(a,0) \mid a \in \mathbb{C}\right\}}$.

Q.5 Démontrer l'inégalité renversée :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \left| \frac{|z_1|}{1+|z_1|} - \frac{|z_2|}{1+|z_2|} \right| \leqslant \frac{|z_1 - z_2|}{1+|z_1 - z_2|}.$$

Solution. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Il s'agit de montrer que :

$$\max \left\{ f(|z_1|) - f(|z_2|),\ f(|z_2|) - f(|z_1|) \right\} \leqslant f(|z_1 - z_2|).$$

L'encadrement établi précédemment donne : $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ f(|a+b|) \leqslant f(|a|) + f(|b|)$. En posant $a = z_1 - z_2$ et $b = z_2$, on obtient $f(|z_1|) \leqslant f(|z_1 - z_2|) + f(|z_2|)$, d'où l'inégalité $f(|z_1|) - f(|z_2|) \leqslant f(|z_1 - z_2|)$. De même $f(|z_2|) - f(|z_1|) \leqslant f(|z_2 - z_1|)$. Or $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$, donc l'inégalité est vraie quel que soit le maximum.

III Complexes et géométrie

Q.6 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$z^2 - 2(1 + i\sqrt{2})z + 2(-1 + 2i\sqrt{2}) = 0. \tag{E}$$

(a) Déterminer les racines carrées de $1 - 2i\sqrt{2}$ dans $\mathbb{C}$.

Solution. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x+iy)^2 = 1 - 2i\sqrt{2}$. Alors :

$$x^2 - y^2 = 1, \quad 2xy = -2\sqrt{2}, \quad x^2 + y^2 = \sqrt{1+8} = 3.$$

d'où $|x| = \sqrt{(3+1)/2} = \sqrt{2}$ et $|y| = \sqrt{(3-1)/2} = 1$. De plus x, y sont de signes opposés. Les racines carrées sont donc : $\boxed{\sqrt{2} - i, \quad -\sqrt{2} + i}$

(b) Résoudre l'équation (E).

Solution. On peut directement « compléter le carré » :

$$\begin{aligned}(E) &\iff \left(z - (1 + i\sqrt{2})\right)^2 = -2(-1 + 2i\sqrt{2}) + (1 + i\sqrt{2})^2 \\ &\iff \left(z - (1 + i\sqrt{2})\right)^2 = 1 - 2i\sqrt{2} \\ &\iff z - (1 + i\sqrt{2}) = \pm(\sqrt{2} - i)\end{aligned}$$

d'après la question précédente. D'où les solutions :

$$\boxed{(1 + \sqrt{2}) + i(\sqrt{2} - 1), \quad (1 - \sqrt{2}) + i(\sqrt{2} + 1)}$$

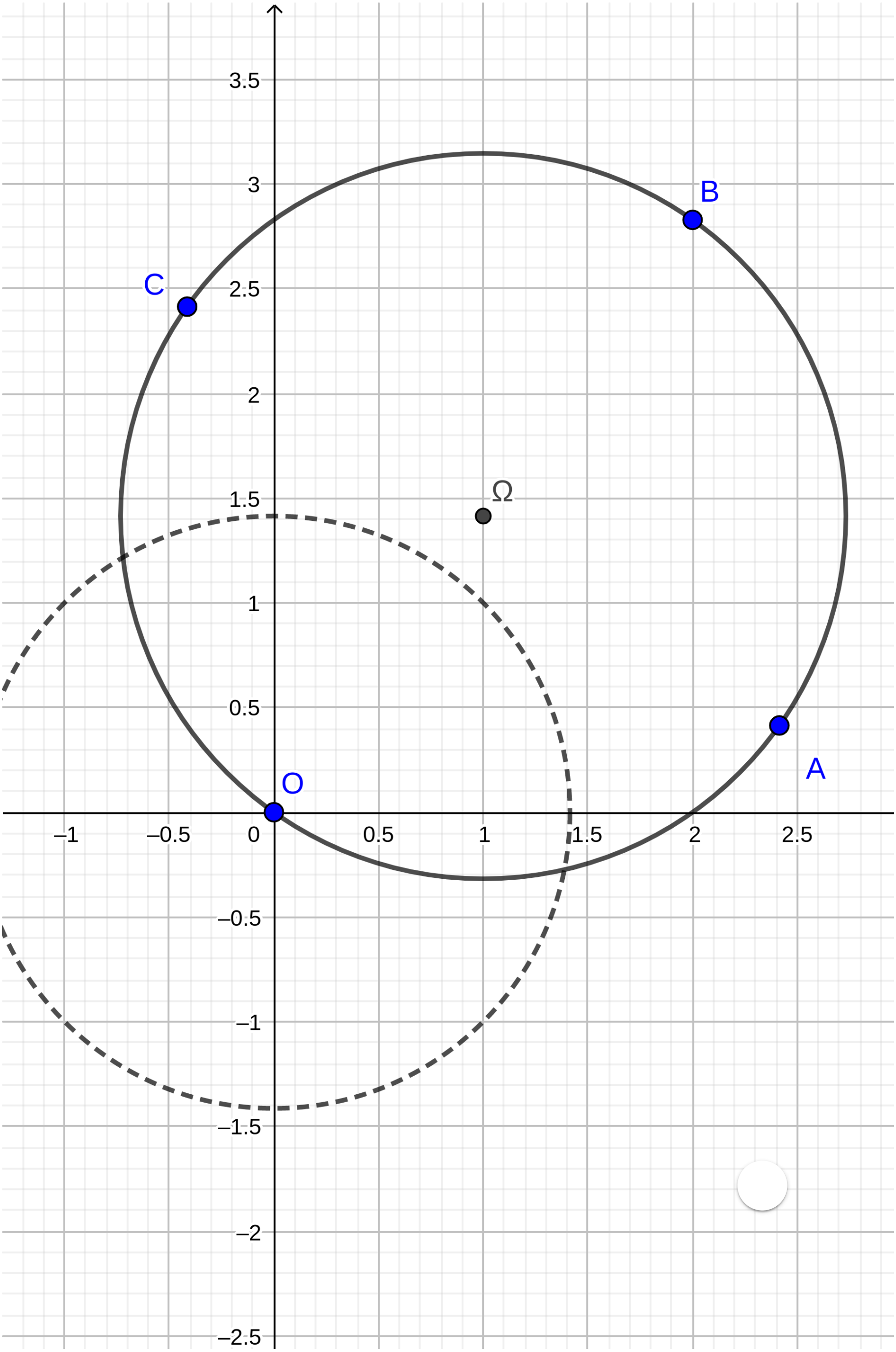
Remarque. Bien sûr, le calcul du discriminant permet aussi d'aboutir.

Q.7 Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectifs :

$$a = (1 + \sqrt{2}) - i(1 - \sqrt{2}), \quad b = 2 + 2i\sqrt{2}, \quad c = (1 - \sqrt{2}) + i(1 + \sqrt{2}).$$

(a) Placer les points A, B et C dans un repère orthonormé du plan, d'unité 4 cm, en construisant précisément $\sqrt{2}$ à la règle et au compas.

Solution. Voir la figure ci-après. Pour construire $\sqrt{2}$, il suffit de reporter la distance entre l'origine et le point d'affixe $1 + i$. En effet, $|1 + i| = \sqrt{2}$.



3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
B
C
Ω
A
O

(b) Vérifier que $c = ia$, puis en déduire la nature exacte du triangle OAC.

Solution. Le calcul est immédiat car $i^2 = -1$.
Ainsi $|c| = |ia| = |a|$ donc $OA = OC$. De plus $(OA)\perp(OC)$ car $\dfrac{c-0}{a-0} \in i\mathbb{R}$.
Le triangle OAC est donc un $\boxed{\text{triangle isocèle rectangle en } O}$.

Q.8 On pose $Z = \dfrac{b-a}{b-c}$.

(a) Donner une écriture trigonométrique du nombre complexe Z.

Solution. En remarquant que $a + c = b$, il vient $Z = \dfrac{c}{a} = i$. D'où l'écriture trigonométrique : $\boxed{Z = 1 \times e^{i\pi/2}}$.

(b) Déterminer alors la nature exacte du triangle ABC.

Solution. En reconnaissant les affixes $Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a$ et $Z_{\overrightarrow{CB}} = b - c$, on peut directement interpréter le quotient :

$$\frac{AB}{CB} = |Z| = 1 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}) \equiv \operatorname{Arg}(Z) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi].$$

Le triangle ABC est donc $\boxed{\text{un triangle isocèle rectangle en } B}$.

Q.9 Montrer que les points A, B, C et O appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Solution. Le point Ω d'affixe $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b}{2} = 1 + i\sqrt{2}$ est à la fois milieu de $[AC]$ et de $[OB]$. De plus ces segments ont la même longueur :

$$OB = |b| = 2|1 + i\sqrt{2}| = 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad AC = |a - c| = |2\sqrt{2} - 2i| = 2\sqrt{3}.$$

Les points O, A, B, C appartiennent donc au $\boxed{\text{cercle de centre } \Omega \text{ et de rayon } \sqrt{3}}$.

IV Inégalités trigonométriques

Q.10 *Préliminaire.*

(a) [Question de cours] Justifier que : $\forall \theta \in \mathbb{R}_+,\ \sin\theta \leqslant \theta$.

Solution. Soit $\theta \in \mathbb{R}_+$. Si $\theta \geqslant \pi/2$, on a simplement $\sin\theta \leqslant 1 \leqslant \theta$.

Supposons maitenant que $0 \leqslant \theta < \pi/2$ et considérons, dans un repère orthonomé du plan euclidien, les points $O(0,0)$, $A(1,0)$ et $M(\cos\theta, \sin\theta)$. Le triangle OAM est inclus dans le secteur angulaire du disque de centre O et de rayon 1 délimité par A et M (d'angle θ).

Par comparaison d'aires : $\boxed{\dfrac{1 \times \sin\theta}{2} \leqslant \dfrac{\theta}{2\pi} \times \pi \times 1^2}$.

(b) En déduire notre première inégalité :

$$\forall x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} \leqslant x. \tag{T}$$

Solution. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors $\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \tan(x) \times \cos^2(x) = \sin(x)\cos(x)$. Or $\sin(x) \leqslant x$ par (a) et $0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc : $\sin(x)\cos(x) \leqslant x\cos(x) \leqslant x$.

Q.11 On considère la fonction f définie de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$$

et on notera f' sa fonction dérivée, définie de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Déterminer les racines de $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ et donner sa factorisation.

Solution. $P(1) = 2 - 3 + 1 = 0$ donc 1 est racine évidente. Par division euclidienne : $P(X) = (X-1)(2X^2 - X - 1)$. À nouveau, le réel 1 est racine évidente de $2X^2 - X - 1$.

On factorise : $P(X) = (X-1)(X-1)(2X+1) = \boxed{2(X-1)^2(X+\frac{1}{2})}$.

Les racines sont : $\boxed{1 \text{ (double) et } -\frac{1}{2} \text{ (simple)}}$.

(b) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $f'(x)$; montrer que $f'(x)$ et $P(\cos x)$ ont même signe.

Solution. La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par somme :

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \boxed{\frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}}.$$

Le dénominateur $\cos^2 x$ est positif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $f'(x)$ est de même signe que le numérateur, c'est-à-dire $P(\cos x)$.

(c) En déduire l'inégalité de Huygens :

$$\forall x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x \geqslant x. \tag{H}$$

Solution. Ceci revient à montrer que f est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors $0 \leqslant \cos x < 1$. Or $P(X) > 0$ pour tout $X \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, donc $P(\cos x) > 0$ en particulier. La dérivée f' est donc positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Donc f est croissante sur cet intervalle et elle admet alors comme minimum sur cet intervalle le réel $f(0) = 0 + 0 - 0 = 0$, d'où le résultat.

Q.12 On considère les fonctions g et h définies de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad g(x) = \frac{\sin^2(x)\tan(x)}{x^3} \quad \text{et} \quad h(x) = 3x - 3\tan(x) + x\tan^2(x).$$

(a) Déterminer les limites de $\dfrac{\sin x}{x}$ et $\dfrac{\tan x}{x}$ lorsque $x \to 0$.

Solution. $\sin 0 = \tan 0 = 0$ donc ce sont des taux d'accroissement. Ainsi,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \sin'(0), \qquad \frac{\tan x}{x} = \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \tan'(0)$$

par dérivabilité. On peut conclure alors :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \cos 0 = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 + \tan^2 0 = 1.}$$

(b) Calculer la dérivée g' de g et montrer qu'elle est de même signe que h sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Solution. La fonction g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par produits et quotient.
Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En notant u la fonction $u = \sin^2 \times \tan$,

$$\begin{aligned}
u'(x) &= 2\sin(x)\sin'(x)\tan(x) + \sin^2(x)\tan'(x) \\
&= 2\sin(x)\cos(x)\tan(x) + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= 2\sin(x)^2 + \tan^2(x).
\end{aligned}$$

Notons aussi $v : t \mapsto t^3$, de sorte que $v'(x) = 3x^2$. Alors, par quotient ;

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{2\sin^2(x)x^3 + \tan^2(x)x^3 - 3\sin^2(x)\tan(x)x^2}{(x^3)^2} \\ &= \frac{2x\sin^2(x) + x\tan^2(x) - 3\sin^2(x)\tan(x)}{x^4}. \end{aligned}$$

Encore un peu de courage ! On factorise le numérateur par $\sin^2(x)$ en utilisant la relation $\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$ pour simplifier :

$$\sin^2(x)\left[2x + \frac{x}{\cos^2(x)} - 3\tan(x)\right] = \sin^2(x)\left[3x + x\tan^2(x) - 3\tan(x)\right]$$

Ceci nous donne finalement la relation suivante, qui permet de conclure :

$$\boxed{\forall x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad g'(x) = \frac{\sin^2(x)h(x)}{x^4}}.$$

(c) Calculer la dérivée h' de la fonction h. À l'aide de l'inégalité (T), en déduire le tableau de variation de h, où l'on précisera les limites en 0 et en $\pi/2$.

Solution. La fonction h est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par produits et sommes. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Sachant que $\tan' = 1 + \tan^2$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3 - 3[1 + \tan^2(x)] + \tan^2(x) + 2x\tan(x)[1 + \tan^2(x)] \\ &= -2\tan^2(x) + 2x\tan(x)[1 + \tan^2(x)] \end{aligned}$$

L'inégalité (T) donne $x[1 + \tan^2(x)] \geqslant \tan(x)$, d'où $h'(x) \geqslant 0$. Par positivité de h' sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction h est croissante sur cet intervalle.

Étudions ses limites :

- Lorsque $x \to 0$, $h(x) = 3x - 3\tan(x) + x\tan^2(x)$ tend vers $0 - 0 + 0$ par opérations sur les limites, car $\tan(x) \to \tan(0) = 0$ par continuité.
- Lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$ (par valeurs inférieures), $\tan(x) \to +\infty$ et le terme

$x\tan^2(x)$ est prépondérant dans la somme :

$$h(x) = x\tan^2(x)\left[1 + \frac{3}{\tan^2(x)} - \frac{3}{x\tan(x)}\right] \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} +\infty.$$

Résumons avec un tableau :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(d) En déduire alors l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad \sin^2(x)\tan(x) \geqslant x^3. \tag{H'}$$

Solution. Puisque h est positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, il en va de même pour g'. Donc g est une fonction croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ elle aussi.

Étudions sa limite lorsque $x \to 0$. Par opérations sur les limites :

$$g(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{\tan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1^2 \times 1 = 1.$$

On peut alors conclure par croissance : $\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{\sin^2(x)\tan(x)}{x^3} \geqslant 1}$.

Q.13 *Pour finir en beauté !*

(a) Soient a, b des réels positifs. Montrer que $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

Solution. Il suffit de déterminer le signe de la différence :

$$a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

(b) En déduire finalement notre dernière inégalité :

$$\forall x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} \geqslant 2. \tag{W}$$

Solution. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Posons : $a = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ et $b = \frac{\tan(x)}{x}$.
On a prouvé que $ab \geqslant 1$, d'où la conclusion : $a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \geqslant 2$.

V Un argument efficace

Soient α, β deux réels tels que $\alpha \not\equiv \beta\ [2\pi]$.

Q.14 Soit γ un réel. Montrer que :

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{e^{i\alpha} - e^{i\gamma}}{e^{i\beta} - e^{i\gamma}}\right) \equiv \frac{\alpha - \beta}{2} \quad [\pi].$$

Solution. Il faut supposer $\gamma \not\equiv \alpha\ [2\pi]$ et $\gamma \not\equiv \beta\ [2\pi]$ pour que cela soit bien défini.
On factorise par l'angle moitié :

$$\frac{e^{i\alpha} - e^{i\gamma}}{e^{i\beta} - e^{i\gamma}} = \frac{e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \times 2i\sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})}{e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}} \times 2i\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})} = \frac{\sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})}{\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})} e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

En notant λ le quotient des sinus, il vient alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}\left(\frac{e^{i\alpha} - e^{i\gamma}}{e^{i\beta} - e^{i\gamma}}\right) &\equiv \operatorname{Arg}(\lambda) + \operatorname{Arg}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)\ [2\pi] \\ &\equiv \operatorname{Arg}(\lambda) + \frac{\alpha-\beta}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Cela reste valide modulo π car $2\pi \in \pi\mathbb{Z}$. Enfin, $\operatorname{Arg}(\lambda) \equiv 0\ [\pi]$ car λ est réel.

Q.15 Soit z un complexe distinct de $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$, tel que $\operatorname{Arg}\left(\frac{e^{i\alpha} - z}{e^{i\beta} - z}\right) \equiv \frac{\alpha - \beta}{2} \quad [\pi]$.

(a) Montrer qu'il existe un réel λ non nul tel que :

$$z = \frac{1 - \lambda e^{i(\beta-\alpha)/2}}{1 - \lambda e^{i(\alpha-\beta)/2}}\, e^{i\alpha}.$$

Solution. Posons $\lambda = \frac{e^{i\alpha} - z}{e^{i\beta} - z} e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}$. Alors par hypothèse :

$$\operatorname{Arg}(\lambda) \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{e^{i\alpha} - z}{e^{i\beta} - z}\right) + \frac{\beta - \alpha}{2} \equiv 0\ [\pi],$$

donc λ est réel. De plus, en notant $\delta = (\beta - \alpha)/2$ pour y voir plus clair,

$$\begin{aligned}
(e^{i\beta} - z)\lambda = (e^{i\alpha} - z)e^{i\delta} &\iff e^{i\beta}\lambda - z\lambda = e^{i\alpha}e^{i\delta} - ze^{i\delta} \\
&\iff (e^{i\delta} - \lambda)z = e^{i\alpha}e^{i\delta} + \lambda e^{i\beta} \\
&\iff z = \frac{e^{i\alpha}e^{i\delta} - \lambda e^{i\beta}}{e^{i\delta} - \lambda} \\
&\iff z = \frac{1 - \lambda e^{i(\beta-\alpha-\delta)}}{1 - \lambda e^{i(-\delta)}} e^{i\alpha}.
\end{aligned}$$

On en déduit la formule attendue car $\beta - \alpha - \delta = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ et $-\delta = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

(b) En déduire que z appartient au cercle unité $\mathbb{U}$.

Solution. Avec les notations précédentes,

$$|z| = \frac{|1 - \lambda e^{i\delta}|}{|1 - \lambda \overline{e^{i\delta}}|} \times |e^{i\alpha}| = \frac{|1 - \lambda e^{i\delta}|}{\overline{|1 - \lambda e^{i\delta}|}} = 1.$$

Q.16 Soient A, B, C, D des points du plan distincts deux à deux et d'affixes a, b, c, d.

(a) Montrer que si les points A, B, C, D sont alignés, alors

$$\frac{a - c}{b - c} \times \frac{b - d}{a - d} \quad \text{est un réel.} \tag{$\heartsuit$}$$

Solution. Supposons que A, B, C, D sont alignés.

- Alors A, B, C sont alignés, donc $\dfrac{a - c}{b - c} \in \mathbb{R}$.
- De même B, A, D sont alignés, donc $\dfrac{b - d}{a - d} \in \mathbb{R}$.

On conclut simplement par produit de deux réels.

(b) Montrer que si les points A, B, C ne sont pas alignés, alors il existe un complexe ω, un réel r strictement positif et des réels α, β, γ tels que :

$$a = \omega + re^{i\alpha}, \quad b = \omega + re^{i\beta}, \quad c = \omega + re^{i\gamma}.$$

Solution. Les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ sont sécantes car sinon les droites (AB) et (AC) seraient parallèles (par double perpendicularité) et les points A, B, C seraient alors alignés.

Notons Ω le point d'intersection de ces médiatrices et ω son affixe. Les relation $\Omega A = \Omega B$ et $\Omega A = \Omega C$ se traduisent directement par $|a-\omega| = |b-\omega| = |c-\omega|$. On pose alors r ce module et α, β, γ des arguments de $a - \omega$, $b - \omega$, $c - \omega$.

(c) Déduire finalement des questions précédentes que $(\heartsuit)$ est une condition nécessaire et suffisante pour que les points A, B, C, D soient alignés ou appartiennent à un même cercle.

Solution. Il reste à traiter le cas où A, B, C, D ne sont pas alignés.

- $(\Leftarrow)$ Supposons que A, B, C, D appartiennent à un même cercle. On dispose alors de $\omega, r, \alpha, \beta, \gamma$ vérifiant les conditions de la question (b), mais aussi de $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $d = \omega + re^{i\delta}$ car il y a unicité du cercle passant par 3 points distincts deux à deux. Le « birapport » est alors le réel :

$$\frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-d}{a-d} = \frac{e^{i\alpha} - e^{i\gamma}}{e^{i\beta} - e^{i\gamma}} \times \frac{e^{i\beta} - e^{i\delta}}{e^{i\alpha} - e^{i\delta}} = \frac{\sin \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}} \times \frac{\sin \frac{\beta-\delta}{2}}{\sin \frac{\alpha-\delta}{2}}$$

- $(\Rightarrow)$ Réciproquement, supposons que le « birapport » est réel et que A, B, C, D ne sont pas alignés. Alors :

$$(A, B, C \text{ ne sont pas alignés}) \text{ ou } (B, A, D \text{ ne sont pas alignés})$$

Dans le premier cas, on dispose de $\omega, r, \alpha, \beta, \gamma$ vérifiant les conditions de la question (b). En notant $z = \frac{1}{r}(d - \omega)$, il vient alors :

$$\frac{e^{i\alpha} - e^{i\gamma}}{e^{i\beta} - e^{i\gamma}} \times \frac{e^{i\beta} - z}{e^{i\alpha} - z} = \frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-d}{a-d}, \text{ d'où } \frac{\alpha - \beta}{2} \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{e^{i\alpha} - z}{e^{i\beta} - z}\right) \ [2\pi]$$

par passage aux arguments. On en déduit que $z \in \mathbb{U}$ d'après la deuxième question, c'est-à-dire que $|d - \omega| = r$. Le point D appartient donc au cercle circonscrit à A, B, C.

Dans le deuxième cas, on pose $A' = B, B' = C, C' = D, D' = C$ et on obtient alors la même valeur réelle pour le birapport de ces points par propriétés des fractions ! Donc A', B', C', D' appartiennent à un même cercle d'après le premier cas.