Deuxième devoir surveillé

14 octobre 2023, 3 heures

La calculatrice est interdite. La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

I Mise en jambe

Q.1 Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ les équations trigonométriques

$$(E_1): \quad \cos(2x) = \sin(x) \qquad \text{et} \qquad (E_2): \quad \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}.$$

Q.2 Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor + 1$.

(b) Résoudre l'équation $\lfloor x/3 \rfloor + \lfloor 2x/3 \rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor$.

II Des inégalités

On considère la fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Q.3 Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,\ (x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y))$.

Q.4 Soient z_1, z_2 deux nombres *complexes*.

(a) [Question de cours] Démontrer l'inégalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

(b) Établir alors l'encadrement :

$$\frac{|z_1 + z_2|}{1 + |z_1 + z_2|} \leqslant \frac{|z_1| + |z_2|}{1 + |z_1| + |z_2|} \leqslant \frac{|z_1|}{1 + |z_1|} + \frac{|z_2|}{1 + |z_2|}.$$

(c) Déterminer les $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que ces trois membres sont égaux.

Q.5 Démontrer l'inégalité renversée :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \left| \frac{|z_1|}{1+|z_1|} - \frac{|z_2|}{1+|z_2|} \right| \leqslant \frac{|z_1 - z_2|}{1+|z_1 - z_2|}.$$

III Complexes et géométrie

Q.6 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$z^2 - 2(1+i\sqrt{2})z + 2(-1+2i\sqrt{2}) = 0. \tag{E}$$

(a) Déterminer les racines carrées de $1 - 2i\sqrt{2}$ dans $\mathbb{C}$.

(b) Résoudre l'équation (E).

Q.7 Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectifs :

$$a = (1+\sqrt{2}) - i(1-\sqrt{2}), \quad b = 2 + 2i\sqrt{2}, \quad c = (1-\sqrt{2}) + i(1+\sqrt{2}).$$

(a) Placer les points A, B et C dans un repère orthonormé du plan, d'unité 4 cm, en construisant précisément $\sqrt{2}$ à la règle et au compas.

(b) Vérifier que $c = ia$, puis en déduire la nature exacte du triangle OAC.

Q.8 On pose $Z = \dfrac{b-a}{b-c}$.

(a) Donner une écriture trigonométrique du nombre complexe Z.

(b) Déterminer alors la nature exacte du triangle ABC.

Q.9 Montrer que les points A, B, C et O appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

IV Inégalités trigonométriques

Q.10 *Préliminaire.*

(a) [Question de cours] Justifier que : $\forall \theta \in \mathbb{R}_+,\ \sin\theta \leqslant \theta$.

(b) En déduire notre première inégalité :

$$\forall x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} \leqslant x. \tag{T}$$

Q.11 On considère la fonction f définie de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$$

et on notera f' sa fonction dérivée, définie de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Déterminer les racines de $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ et donner sa factorisation.

(b) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $f'(x)$; montrer que $f'(x)$ et $P(\cos x)$ ont même signe.

(c) En déduire l'inégalité de Huygens :

$$\forall x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x \geqslant x. \tag{H}$$

Q.12 On considère les fonctions g et h définies de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad g(x) = \frac{\sin^2(x)\tan(x)}{x^3} \quad \text{et} \quad h(x) = 3x - 3\tan(x) + x\tan^2(x).$$

(a) Déterminer les limites de $\dfrac{\sin x}{x}$ et $\dfrac{\tan x}{x}$ lorsque $x \to 0$.

(b) Calculer la dérivée g' de g et montrer qu'elle est de même signe que h sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(c) Calculer la dérivée h' de la fonction h. À l'aide de l'inégalité (T), en déduire le tableau de variation de h, où l'on précisera les limites en 0 et en $\pi/2$.

(d) En déduire alors l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad \sin^2(x)\tan(x) \geqslant x^3. \tag{H'}$$

Q.13 *Pour finir en beauté !*

(a) Soient a, b des réels positifs. Montrer que $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

(b) En déduire finalement notre dernière inégalité :

$$\forall x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} \geqslant 2. \tag{W}$$

V Un argument efficace

Soient α, β deux réels tels que $\alpha \not\equiv \beta\ [2\pi]$.

Q.14 Soit γ un réel. Montrer que :

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{e^{i\alpha}-e^{i\gamma}}{e^{i\beta}-e^{i\gamma}}\right) \equiv \frac{\alpha-\beta}{2} \quad [\pi].$$

Q.15 Soit z un complexe distinct de $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$, tel que $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{e^{i\alpha}-z}{e^{i\beta}-z}\right) \equiv \dfrac{\alpha-\beta}{2} \quad [\pi]$.

(a) Montrer qu'il existe un réel λ non nul tel que :

$$z = \frac{1-\lambda e^{i(\beta-\alpha)/2}}{1-\lambda e^{i(\alpha-\beta)/2}}\, e^{i\alpha}.$$

(b) En déduire que z appartient au cercle unité $\mathbb{U}$.

Q.16 Soient A, B, C, D des points du plan distincts deux à deux et d'affixes a, b, c, d.

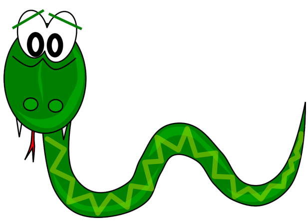
(a) Montrer que si les points A, B, C, D sont alignés, alors

$$\frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-d}{a-d} \quad \text{est un réel.} \tag{$\heartsuit$}$$

(b) Montrer que si les points A, B, C ne sont pas alignés, alors il existe un complexe ω, un réel r strictement positif et des réels α, β, γ tels que :

$$a = \omega + re^{i\alpha}, \quad b = \omega + re^{i\beta}, \quad c = \omega + re^{i\gamma}.$$

(c) Déduire finalement des questions précédentes que $(\heartsuit)$ est une condition nécessaire et suffisante pour que les points A, B, C, D soient alignés ou appartiennent à un même cercle.



FIN