Troisième devoir surveillé

le 24 novembre 2023, de 8h à 11h30

La calculatrice est interdite. La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice I. Échauffement

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x).$$

Q.1 Dresser le tableau de variation de g sur $]0,+\infty[$, en détaillant le calcul des limites.

Q.2 Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ g(x) > 0$. En déduire les variations de f.

Q.3 Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans un intervalle I à déterminer.

Q.4 Montrer que l'application $f^{-1} : I \to]0,+\infty[$ est dérivable. Calculer $(f^{-1})'(2)$.

Exercice II. Involutions monotones

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) = x. \tag{1}$$

Q.5 Préliminaires.

(a) Montrer que f est une bijection et préciser son application réciproque.

(b) Que peut-on en déduire pour le graphe de f ?

(c) Montrer que si f est croissante, alors f est l'application identité.

Q.6 On suppose maintenant que f est une fonction *décroissante* et *continue.*

(a) Montrer que f est *strictement* décroissante.

(b) On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto -x$. Trouver un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) - ax$ vérifie :

$$h \circ f = g \circ h. \tag{2}$$

(c) Montrer que h est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que son application réciproque h^{-1} est continue aussi. Exprimer f en fonction de g, h et h^{-1}.

Q.7 En déduire l'ensemble des f décroissantes et continues qui vérifient (1).

Exercice III. Fonctions circulaires réciproques

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2\operatorname{Arctan}(x).$$

Q.8 Justifier que f est bien définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-elle continue ?

Q.9 Réduction du domaine.

(a) Montrer que : $\forall x \in [-1, 1],\ \operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos}(x)$.

(b) Calculer $f(0), f(1), f(\sqrt{3}), f(-1)$ et $f(-\sqrt{3})$.

(c) Justifier que la courbe de f admet un centre de symétrie en un point à déterminer.

Q.10 Étude de dérivée.

(a) Sur quels intervalles la fonction f est-elle dérivable ? Calculer sa dérivée.

(b) Monter que f est constante sur $[-1, 1]$.

(c) Démontrer que : $\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) = 4\operatorname{Arctan}(x) - \dfrac{\pi}{2}$.

Q.11 Tracer l'allure de la courbe représentative de f, avec ses asyptotes en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice IV. Points rationnels du cercle unité

L'objectif de cet exercice est de décrire l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ de tous les points du cercle unité à coordonnées rationnelles. On note $E' = E \setminus \{(-1, 0)\}$. On considère l'application f de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}^2$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{Q}, \quad f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right).$$

Q.12 Une inclusion.

(a) Montrer que $f(\mathbb{Q}) \subset E'$.

(b) Calculer $f(0), f(1), f(1/2)$ et $f(2/3)$.

(c) En déduire deux triplets *non colinéaires* d'entiers (a, b, c) tels que

$$0 < a < b < c \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Q.13 Injectivité.

(a) Soient $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$ et $t = \tan(\theta/2)$. Montrer que :

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{2t}{1+t^2} = \sin(\theta).$$

(b) En déduire que f est une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Q.14 Soit g l'application de E' dans $\mathbb{Q}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in E', \quad g(x, y) = \frac{y}{x+1}.$$

(a) Vérifier que : $\forall (x, y) \in E',\ (f \circ g)(x, y) = (x, y)$.

(b) En déduire que $f(\mathbb{Q}) = E'$.

(c) Montrer de plus que g est une bijection de E' dans $\mathbb{Q}$.

Exercice V. Sommes et racines n-ièmes de l'unité

Un premier exemple

Q.15 Notons j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{1 + j^p + j^{2p}}{3} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est divisible par } 3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q.16 Calculer les sommes $A_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$, $B_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} j^p$ et $C_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} j^{2p}$, puis en déduire que pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k} = \frac{2}{3}\left[2^{n-1} + \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right].$$

Q.17 Calculer de même

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k+2}.$$

Une transformation discrète générale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{i\,\frac{2\pi}{n}}$.
On note E_n l'ensemble des fonctions de $[\![0, n-1]\!]$ dans $\mathbb{C}$. Pour toute fonction $f \in E_n$, on note $\widehat{f} \in E_n$ la fonction définie par :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!], \quad \widehat{f}(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{f(k)}\, \omega^{pk}.$$

En posant $\Phi(f) = \widehat{f}$, on définit ainsi une application $\Phi : E_n \longrightarrow E_n$.

Q.18 Soit $a \in \mathbb{Z}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{ak}$ en fonction de la valeur de a.

Q.19 Montrer que $\Phi \circ \Phi = n\ \mathrm{id}_{E_n}$ par un calcul de somme double. En déduire que Φ est une bijection de E_n dans E_n et préciser sa bijection réciproque.

Une identité remarquable

Q.20 Soient $f \in E_n$ et $\widehat{f} = \Phi(f)$. Montrer que :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \left|\widehat{f}(p)\right|^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} |f(k)|^2 .$$

Q.21 On rappelle que $\omega = e^{i\,\frac{2\pi}{n}}$. Pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} k\,\omega^{pk} = \frac{n}{\omega^p - 1}$$

et calculer le module de ce nombre complexe.

Q.22 En considérant un élément $f \in E_n$ bien choisi, en déduire finalement que :

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi p}{n}\right)^2} = \frac{n^2-1}{3}.$$