Quatrième devoir surveillé

Solutions

I Questions de cours

▶ **I.1** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui tend vers un certain réel ℓ.

– **a)** Énoncer la définition de « (u_n) tend vers ℓ ».

Solution. $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \epsilon)$.

– **b)** Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\ell > a$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N,\ u_n > a$.

Solution. Comme $\frac{\ell-a}{2} > 0$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{\ell-a}{2}$. Pour tout $n \geqslant N$, il vient alors $u_n - \ell \geqslant -|u_n - \ell| \geqslant -\frac{\ell-a}{2}$ d'où $u_n \geqslant \frac{\ell+a}{2} > a$.

II Exercice. Intégrale trigonométrique

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x) - 2\cos(x) + 3}\, dx$.

▶ **II.1** Calculer I en posant le changement de variable $t = \cos(x)$.

Solution. Effectuons le changement de variable :

$$\left|\begin{array}{ll} t & = \cos(x) \\ dt & = -\sin(x)dx \\ 0 & = \cos(\pi/2) \\ 1 & = \cos(0) \end{array}\right. \quad \text{avec la fonction } \varphi : \left|\begin{array}{ccc} [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}\right. \quad \text{de classe } \mathscr{C}^1.$$

Comme $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ et $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{(-2\cos(x))(-\sin(x))\, dx}{2\cos^2(x) - 2\cos(x) + 2} = -\int_1^0 \frac{2t\, dt}{2t^2 - 2t + 2} = \int_0^1 \frac{t\, dt}{t^2 - t + 1}.$$

En notant $u(t) = t^2 - t + 1$ et $u'(t) = 2t - 1$,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u'(t)}{u(t)}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2 - t + 1} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\Big[\ln|t^2 - t + 1|\Big]_0^1}_{0} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{(t - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}. \end{aligned}$$

Finalement, $I = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{t - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_0^1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}}$.

III Exercice. Emprunt à taux fixe

Soient τ et A deux réels strictement positifs et N un entier naturel non nul.

On considère une suite de réels (u_n) telle que : $\begin{cases} u_N = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (1+\tau)u_n - A. \end{cases}$

▶ **III.1** Montrer que $u_0 = \dfrac{A}{\tau}\left[1 - \dfrac{1}{(1+\tau)^N}\right]$.

Solution. La suite (u_n) est arithmético-géométrique.
Équation de point fixe : $x = (1+\tau)x - A \iff A = \tau x \iff x = \frac{A}{\tau}$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \frac{A}{\tau} = (1+\tau)\left(u_n - \frac{A}{\tau}\right) - (0 - 0)$.
La suite $(u_n - \frac{A}{\tau})$ est donc géométrique : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - \frac{A}{\tau} = (1+\tau)^n\left(u_0 - \frac{A}{\tau}\right)$.
Sachant que $u_N = 0$, il vient $[(1+\tau)^n - 1]\frac{A}{\tau} = (1+\tau)^n u_0$, d'où la conclusion.

IV Exercice. Équations d'ordre 2

▶ **IV.1** Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. Équation caractéristique : $r^2 + 2r - 3 = 0 \iff (r = 1 \text{ ou } r = -3)$. Les solutions de $y'' + 2y' - 3y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-3x}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On cherche ensuite une solution particulière de la forme $f : x \mapsto P(x)xe^x$ avec $P(x) = Ax + b$. Par dérivation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) = (8Ax + 2A + 4B)e^x$$

donc f est bien solution si $8A = 1$ et $A + 2B = 0$. On pose $A = \frac{1}{8}$ et $B = -\frac{1}{16}$.

En conclusion, les solutions sont les fonctions

$$\boxed{\left(\frac{x^2}{8}-\frac{x}{16}\right)e^x+\lambda e^x+\mu e^{-3x} \quad \text{où} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.}$$

▶ **IV.2** Soit (u_n) la suite de réels définie par : $\begin{cases} u_0=0,\ u_1=-2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n. \end{cases}$

Expliciter, dans $\mathbb{R}$, le terme général de la suite (u_n) en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Solution. Équation caractéristique : $r^2-2r+2=0 \iff (r=1+i \text{ ou } r=1-i)$. Comme $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, il existe λ,μ réels tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=(\sqrt{2})^n\left(\lambda\cos(\pi n/4)+\mu\sin(\pi n/4)\right).$$

Conditions initiales : $\begin{cases} \lambda+0=0 \\ \lambda\frac{(\sqrt{2})^2}{2}+\mu\frac{(\sqrt{2})^2}{2}=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=-2 \end{cases}.$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\ \mathbb{N},\quad u_n=-2(\sqrt{2})^n\sin(\pi n/4).}$

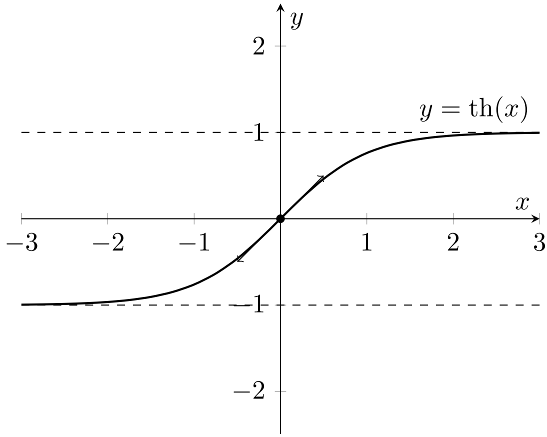
V Problème. Analyse hyperbolique

On appelle *tangente hyperbolique* la fonction th : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $x\longmapsto\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

▶ **V.1** Étudier les variations de la fonction th et tracer l'allure de sa courbe, en précisant les éventuelles invariances et asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution. Comme ch ne s'annule pas, th est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables : $\mathrm{th}'=\dfrac{\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2}=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}>0$, donc th croît strictement sur $]-\infty,+\infty[$. De plus th est impaire : $\forall x\ \in\mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)}=\dfrac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. Le point $(0,0)$ est donc centre de symétrie de la courbe. L'équation de la tangente en ce point est donnée par $y-\mathrm{th}(0)=\mathrm{th}'(0)(x-0)$, i.e. $y=x$.

Étudions les asymptotes. Lorsque $x\to+\infty$, $\mathrm{th}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\to 1$. Par imparité, $\mathrm{th}(x)=-\mathrm{th}(-x)\to-1$ lorsque $x\to-\infty$.



V.A Équation différentielle

▶ **V.2** Résoudre l'équation différentielle $y' + \operatorname{th}(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. La fonction $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$ est primitive de $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{ch}'}{\operatorname{ch}}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $e^{-\ln(\operatorname{ch}(x))} = 1/\operatorname{ch}(x)$, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions

$$\boxed{h_\lambda : x \longmapsto \frac{\lambda}{\operatorname{ch}(x)}, \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

▶ **V.3** Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + \operatorname{th}(x)y = x\operatorname{th}(x) \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Solution. Par variation de la constante, on cherche $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{k'(x)}{\operatorname{ch}(x)} = x\operatorname{th}(x)$, i.e. $k'(x) = x\operatorname{sh}(x)$. Il suffit clairement de prendre la fonction $k : x \mapsto x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$, d'où une solution particulière de $y' + \operatorname{th}(x)y = x\operatorname{th}(x)$, donnée par

$$f_0 : x \longmapsto \frac{x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{f_0 : x \longmapsto x - \operatorname{th}(x).}$$

Comme $f_0(0) = 0$, c'est déjà l'unique solution du problème de Cauchy.

V.B Primitives

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^n(t)}$.

▶ **V.4** Soit n un entier naturel non nul.

– **a)** Justifier que F_n est l'unique primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^n}$ telle que $F_n(0) = 0$.

Solution. La fonction $1/\mathrm{ch}^n$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ donc F_n est bien une primitive de $1/\mathrm{ch}^n$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. De plus $F_n(0) = 0$. Montrons l'unicité. Soit G_n une autre primitive telle que $G_n(0) = 0$. Alors $F_n - G_n$ est constante et $F_n(0) - G_n(0) = 0$ donc $F_n - G_n$ est la fonction nulle, i.e. $F_n = G_n$.

– **b)** Étudier la parité et la monotonie de la fonction F_n.

Solution. Déjà, $F_n' = 1/\,\mathrm{ch}^n > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc F_n est strictement croissante. Montrons que F_n. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le changement de variable $t = -u$ donne :

$$\underbrace{\int_0^{-x} \frac{dt}{\mathrm{ch}^n(t)}}_{F_n(-x)} = \int_0^x \frac{(-1)du}{\mathrm{ch}^n(-u)} = \underbrace{-\int_0^x \frac{du}{\mathrm{ch}^n(u)}}_{-F_n(x)} \quad \text{par parité de ch.}$$

▶ **V.5** Calculer explicitement la fonction F_1.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, on se ramène avec une fonction rationnelle par changement de variable avec $\varphi : u \mapsto \ln u$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\left|\begin{array}{l} t = \ln u \\ dt = \frac{1}{u}\,du \\ x = \ln(e^x) \\ 0 = \ln(1) \end{array}\right. \qquad \text{d'où} \qquad \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)} = \int_1^{e^x} \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = 2\int_1^{e^x} \frac{du}{u^2+1}.$$

On obtient finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ F_1(x) = 2\,\mathrm{Arctan}(e^x) - \dfrac{\pi}{2}.}$

▶ **V.6** Calculer explicitement la fonction F_2.

Solution. On a déjà vu que $\mathrm{th}' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$ et $\mathrm{th}(0) = 0$, donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^2(t)} = \mathrm{th}(x).}$$

▶ **V.7** Démontrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$(n+1)F_{n+2}(x) = nF_n(x) + \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{n+1}(x)}.$$

Solution. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme $1 = \operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2$,

$$(n+1)F_{n+2}(x) = (n+1)\int_0^x \left(\frac{\operatorname{ch}^2(t)}{\operatorname{ch}^{n+2}(t)} - \frac{\operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^{n+2}(t)}\right) dt = (n+1)F_n(x) - G_n(x)$$

où le dernier terme se simplifie en intégrant par parties :

$$G_n(x) = (n+1)\int_0^x \frac{\operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^{n+2}(t)} dt = \left[\frac{-\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^{n+1}(t)}\right]_0^x + \int_0^x \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^{n+1}(t)} dt.$$

Finalement, on trouve bien : $(n+1)F_{n+2}(x) = (n+1-1)F_n(x) + \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^{n+1}(x)}$.

▶ **V.8** En déduire les fonctions F_3 et F_4.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n = 1$, la relation $2F_3(x) = F_1(x) + \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}$ donne :

$$\boxed{F_3(x) = \operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}^2(x)}.}$$

En prenant $n = 2$, on obtient de même :

$$\boxed{F_4(x) = \frac{2}{3}\operatorname{th}(x) + \frac{\operatorname{sh}(x)}{3\operatorname{ch}^3(x)}.}$$

V.C Limites d'intégrales

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction F_n admet une limite en $+\infty$, notée

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^n(t)} = \lim_{x \to +\infty} F_n(x).$$

▶ **V.9** Calculer I_1 et I_2.

Solution. Sachant l'expression de F_1 :

$$\boxed{I_1 = \lim_{x\to+\infty} 2\operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}} \quad \text{car} \quad \lim_{X\to+\infty} \operatorname{Arctan}(X) = \frac{\pi}{2}.$$

De même, $\boxed{I_2 = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1.}$

▶ **V.10** En utilisant les résultats de la partie précédente, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+2} = \frac{n}{n+1} I_n.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les résultats précédents,

$$(n+1)F_{n+2}(x) - nF_n(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^{n+1}(x)} = \frac{2^n}{e^{nx}} \frac{1-e^{-x}}{(1+e^{-x})^{n+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que $(n+1)I_{n+2} - nI_n = 0$. La conclusion s'ensuit.

▶ **V.11** En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{2k+1} = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

Solution. Pour $k = 0$, on a bien $I_1 = \dfrac{\pi}{2}$ (déjà vu).
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que la formule est vraie pour I_{2k+1} et démontrons-la pour $I_{2(k+1)+1} = I_{2k+3}$. En prenant $n = 2k+1$ dans la question précédente,

$$I_{2k+3} = \frac{2k+1}{2k+2} I_{2k+1} = \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{4^k (2k+2)^2 (k!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+2)!}{4^{k+1}((k+1)!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

On conclut par principe de récurrence.

▶ **V.12** Expliciter de même I_{2k} pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Solution. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la relation de récurrence en prenant successivement pour n les valeurs $2k-2,\ 2k-4,\ \ldots,\ 2$ (entiers pairs) :

$$I_{2k} = \frac{(2k-2)\times(2k-4)\times\cdots\times 2}{(2k-1)\times(2k-3)\times\cdots\times 3} I_2 = \frac{\left(2^{k-1}(k-1)!\right)^2}{(2k-1)!} = \boxed{\frac{4^{k-1}((k-1)!)^2}{(2k-1)!}.}$$

Plus rigoureusement, la récurrence de la question précédente s'adapte directement.

VI Problème. Suite homographique

Soit α un réel positif. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs réelles et supposées distinctes de -2α, qui vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\alpha u_n - 1}{u_n + 2\alpha}.$$

VI.A Premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $\alpha = 2$ *et* $u_0 = 0$.

▶ **VI.1** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in\,]-1, +\infty[$.

Solution. Pour $n = 0$, on a bien $0 > -1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > -1$ et vérifions que $u_{n+1} > -1$:

$$u_{n+1} - (-1) = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4} + \frac{u_n + 4}{u_n + 4} = \frac{3(u_n - (-1))}{u_n + 4} > 0.$$

On conclut par principe de récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

▶ **VI.2** Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{u_n + 4} + 1} = \frac{u_n + 4}{3u_n + 3} = \frac{3}{3(u_n + 1)} + \frac{u_n + 1}{3(u_n + 1)} = v_n + \frac{1}{3}.$$

La suite (v_n) est donc arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

▶ **VI.3** Expliciter alors (u_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Quelle est sa limite ?

Solution. Déjà, $v_0 = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{u_n + 1} = v_n = 1 + \frac{n}{3}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_n = \frac{3}{n+3} - 1 = \frac{-n}{n+3}.}$$

Sachant que $\dfrac{3}{n+3} \to 0$, on obtient directement la limite : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1.}$

VI.B Cas convergent

On suppose maintenant que $\alpha > 2$.

On note r, s les deux racines de $x^2 + \alpha x + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$, telles que $r < s$.

▶ **VI.4** Montrer que : la suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 \in \{r, s\}$.

Solution. La suite (u_n) est constante si et seulement si u_0 est un point fixe de la fonction itérée : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\alpha\}$,

$$\frac{\alpha x - 1}{x + 2\alpha} = x \iff -\frac{x^2 + \alpha x + 1}{x + 2\alpha} = 0 \iff x^2 + \alpha x + 1 = 0 \iff x \in \{r, s\}.$$

▶ **VI.5** Étudier la monotonie de (u_n) dans les cas $r < u_0 < s$ et $u_0 > s$.

Solution. Notons $I_1 =]r, s[$ et $I_2 =]s, +\infty[$. Par formules de Viète, $r + s = -\alpha$ et $rs > 0$ donc $-\alpha < r < s < 0$. Les intervalles I_1, I_2 sont donc inclus dans $I =]-2\alpha, +\infty[$. Étudions alors la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \frac{\alpha x - 1}{x + 2\alpha}$. Cette fonction est dérivable et strictement croissante sur I car :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{\alpha(x + 2\alpha) - (\alpha x - 1)}{(x + 2\alpha)^2} = \frac{2\alpha^2 + 1}{(x + 2\alpha)^2} > 0.$$

Mais alors : $\forall x \in I_1,\ f(r) < f(x) < f(s)$. De même : $\forall x \in I_2,\ f(s) < f(x)$. Comme $f(r) = r$ et $f(s) = s$, on en déduit que I_1 et I_2 sont stables par f. De plus, $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant sur I_1 et sur I_2 car :

$$\forall x \in I, \quad f(x) - x = -\frac{x^2 + \alpha x + 1}{x + 2\alpha} = -\frac{(x - r)(x - s)}{x + 2\alpha}.$$

- Supposons que $u_0 \in I_1$. Alors (u_n) est à valeurs dans I_1 par stabilité. Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) - u_n > 0$, i.e. $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est strictement croissante.
- Supposons que $u_0 \in I_2$. Alors (u_n) est à valeurs dans I_2 par stabilité. Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) - u_n < 0$, i.e. $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

On suppose dorénavant $u_0 \notin \{r, s\}$ et on pose $w_n = \dfrac{u_n - s}{u_n - r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▶ **VI.6** Montrer que la suite (w_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\alpha - s}{\alpha - r}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $x = u_n$ pour alléger les notations. Alors :

$$w_{n+1} = \frac{f(x) - s}{f(x) - r} = \frac{\alpha x - 1 - s(x + 2\alpha)}{\alpha x - 1 - r(x + 2\alpha} = \frac{(\alpha - s)x - 1 - 2\alpha s}{(\alpha - r)x - 1 - 2\alpha r}$$

En remarquant que $x = (x - s) + s$ et de même $x = (x - r) + r$, il vient alors :

$$w_{n+1} = \frac{(\alpha - s)(x - s) - 1 - \alpha s - s^2}{(\alpha - r)(x - r) - 1 - \alpha r - r^2} = \frac{(\alpha - s)(x - s)}{(\alpha - r)(x - r)} = \frac{\alpha - s}{\alpha - r} w_n.$$

En effet, r et s sont solutions de $x^2 + \alpha x + 1 = 0$.

▶ **VI.7** En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite finie, que l'on précisera.

Solution. Posons $q = \frac{\alpha - s}{\alpha - r}$. D'après ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = q^n w_0$.
Or $0 < \alpha - s < \alpha - r$, donc $0 < q < 1$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$.
De $w_n = \dfrac{u_n - s}{u_n - r}$, on déduit $u_n = \dfrac{s - r w_n}{1 - w_n}$ par simple calcul, si $w_n \neq 1$.
Par opérations sur les limites, on peut conclure : $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s.}$

▶ **VI.8** Expliciter (u_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$ lorsque $\alpha = \dfrac{5}{2}$ et $u_0 = 0$.

Solution. On trouve $r = -2$ et $s = -\frac{1}{2}$ dans ce cas, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = \frac{-\frac{1}{2} + 2(\frac{4}{7})^n \frac{1}{4}}{1 - (\frac{4}{7})^n \frac{1}{4}} = \frac{-2 \times 7^n + 2 \times 4^n}{4 \times 7^n - 4^n}.}$$

VI.C Cas divergent

On suppose enfin que $0 \leqslant \alpha < 2$.
On note $r, \overline{r}$ les deux racines de $z^2 + \alpha z + 1$ dans $\mathbb{C}$.

▶ **VI.9** Montrer qu'il existe θ, φ éléments de $]0, 2\pi[$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_n - \overline{r}}{u_n - r} = e^{i(n\theta + \varphi)}$.

Solution. Posons $w_n = \dfrac{u_n - \overline{r}}{u_n - r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme dans l'autre cas, la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{\alpha - \overline{r}}{\alpha - r}$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = q^n w_0$.
Or α est réel, donc $|q| = 1$ et $q \neq 1$. Il existe alors $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $q = e^{i\theta}$. De

même, il existe $\varphi \in]0, 2\pi[$ tel que $w_0 = \dfrac{u_0 - \overline{r}}{u_0 - r} = e^{i\varphi}$, ce qui permet de conclure.

▶ **VI.10** En déduire que la suite (u_n) n'admet pas de limite.

Solution. On raisonne par l'absurde.

- Supposons que (u_n) admet une limite finie ℓ dans $\mathbb{R}$. Alors, par opérations, la suite (w_n) admet aussi une limite finie ℓ' dans $\mathbb{C}$, de module 1. Mais alors :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ell'}{\ell'} = 1, \quad \text{d'où} \quad e^{i\theta} = 1.$$

  C'est absurde car $\theta \notin]0, 2\pi[$.

- Supposons que (u_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Alors $w_n = \dfrac{1 - \frac{\overline{r}}{u_n}}{1 - \frac{r}{u_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, d'où une contradiction en raisonnant comme dans le cas précédent.

▶ **VI.11** Expliciter (u_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$ lorsque $\alpha = 1$ et $u_0 = 0$.

Solution. Dans ce cas, les racines sont $r = e^{i2\pi/3} = j$, et $\overline{r} = \overline{j} = j^2$. Puis :

$$w_0 = \frac{0 - j^2}{0 - j} = j = e^{i2\pi/3} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 - j^2}{1 - j} = 1 + j = -j^2 = e^{i\pi/3}.$$

Tous calculs faits, on obtient après factorisation par l'angle moitié :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{j^2 - j^2\, q^n}{1 - jq^n} = -\frac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{\sin(\frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{3})}.}$$

Remarque. On constate que $u_3 = -2$, donc la condition de l'énoncé n'est pas satisfaite dans ce cas et u_4 n'est pas bien définie (division par 0). Il serait en fait possible de prolonger f en posant $f(-2) = \infty$ et $f(\infty) = \alpha$ pour éviter ce problème.