Cinquième devoir surveillé

Solutions

I Échauffement

▶ **I.1** Étudier la monotonie, puis la limite éventuelle, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante. Par théorème de la limite monotone, (u_n) admet une limite ℓ telle que $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$. Supposons que $\ell \in \mathbb{R}$ et cherchons une contradiction :

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0 \quad \text{et} \quad e^{-u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\ell}.$$

par continuité de l'exponentielle et caractérisation séquentielle des limites. Donc $e^{-\ell} = 0$ par unicité de la limite, ce qui est absurde. Conclusion : $\ell = +\infty$.

▶ **I.2** Montrer que la matrice A suivante est inversible, et calculer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution.
On applique la méthode de Gauss-Jordan :

- $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $L_2 \leftrightarrow L_3$
- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $L_3 \leftarrow -L_3 + 2L_2$

  On obtient un premier membre triangulaire, dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc A est inversible :
- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3 \end{array}$
- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$
- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{array}$

On obtient donc finalement : $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

II Convergence de suites

À tout n entier naturel non nul, on associe la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\, x^{n+1} - (n+1)\, x^n.$$

On note alors u_n l'unique solution positive de l'équation $f_n(x) = 1$. Le but de l'exercice est d'étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

▶ **II.1** *Préliminaire.* Démontrer que, pour tout λ réel, $\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^\lambda$.

Solution. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La suite est constante si $\lambda = 0$ et on a bien $e^0 = 1$.
Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. Puisque $1 + \frac{\lambda}{n} \to 1$, existe un rang à partir duquel

$1+\frac{\lambda}{n}>0$. On peut alors passer au logarithme :

$$\ln\left[\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n\right] = n\ln\left[1+\frac{\lambda}{n}\right] = \frac{\ln\left[1+\frac{\lambda}{n}\right]}{\frac{\lambda}{n}}\times\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda, \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1.$$

On conclut finalement car continuité de l'exponentielle.

▶ **II.2** Déterminer la valeur de u_1.

Solution. On résout pour x positif :

$$f_1(x)=1 \iff x^2-2x=1 \iff (x-1)^2=2 \iff |x-1|=\sqrt{2}.$$

Puisque $1-\sqrt{2}<0$, l'unique solution positive est donc $u_1=1+\sqrt{2}$.

▶ **II.3** Soit n un entier naturel non nul.

– **a)** Dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $[0,+\infty[$.

Solution. La fonction f_n est polynomiale, donc dérivable. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f_n'(x)=n(n+1)x^n-(n+1)nx^{n-1}=n(n+1)x^{n-1}(x-1).$$

On en déduit que :

- f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$, avec $f_n(0)=0$ et $f_n(1)=-1$.
- f_n est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, avec

$$f_n(x)=x^{n+1}\left(n-\frac{n}{x}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$

– **b)** En déduire l'existence d'une unique solution sur $[0,+\infty[$ pour l'équation $f_n(x)=1$.

Solution. La fonction $f_n|_{[1,+\infty[}$ est continue et strictement croissante, donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ dans un intervalle de même type : $[-1,+\infty[$. En particulier, 1 admet un unique antécédent dans $[1,+\infty[$. De plus, f_n est négative sur $[0,1]$, donc il n'existe pas de solution sur cet intervalle.

– **c)** Démontrer l'encadrement : $1+\frac{1}{n}\leqslant u_n\leqslant 1+\frac{2}{n}$.

Solution. On sait que $f_n(u_n)=1$. Comparons avec les points considérés :

$$f_n\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)-(n+1)\right]=0.$$

Puisque $0 < 1$, on en déduit que $1 + \dfrac{1}{n} < u_n$ par contraposée de la croissance de f_n sur $[1, +\infty[$. On établit de même l'autre inégalité, en remarquant que :

$$f_n\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \left[n\left(1 + \frac{2}{n}\right) - (n+1)\right] = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n > 1.$$

▶ **II.4** Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Solution. Puisque $1+\frac{1}{n} \to 1$ et $1+\frac{2}{n} \to 1$, on en déduit par théorème d'encadrement que la suite (u_n) est convergente et de limite 1.

▶ **II.5** Dresser le tableau de variation de la fonction $\varphi : x \mapsto e^x(x-1)$ sur $\mathbb{R}$. Prouver l'existence d'un réel $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\varphi < 1$ sur $]-\infty, \alpha[$ et $\varphi > 1$ sur $]\alpha, +\infty[$.

Solution. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = e^x(x-1) + e^x = xe^x.$$

L'exponentielle est à valeurs strictement positives, donc :

- sur $]-\infty, 0]$, la fonction φ décroît strictement,
- sur $[0, +\infty[$, la fonction φ croît strictement,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ par produit.

La fonction $\varphi|_{[1,2]}$ est continue et 1 est située entre $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(2) = e^2 > 1$. Par théorème des valeurs intérmédiaires, il existe donc $\alpha \in [1, 2]$ tel que $\varphi(\alpha) = 1$. En outre, $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 2$ donc $\alpha \in]1, 2[$. Par stricte croissance, $\varphi > 1$ sur $]\alpha, +\infty[$ car $\varphi(\alpha) = 1$. De même, $\varphi < 1$ sur $[0, \alpha[$. Enfin, $\varphi < 0$ sur $]-\infty, 0]$ d'où $\varphi < 1$ aussi.

▶ **II.6** Soit ε un réel strictement positif.

– **a)** Que valent $\lim\limits_{n \to \infty} f_n\left(1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n \to \infty} f_n\left(1 + \frac{\alpha + \varepsilon}{n}\right)$?

Solution. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f_n\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \left[n\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) - (n+1)\right] = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n (\lambda - 1)$$

et donc, d'après la question préliminaire, $f_n\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) \to e^\lambda(\lambda - 1)$ lorsque $n \to +\infty$. En particulier, $f_n(1 + \frac{\alpha-\varepsilon}{n}) \to \varphi(\alpha - \varepsilon)$ et $f_n(1 + \frac{\alpha+\varepsilon}{n}) \to \varphi(\alpha + \varepsilon)$.

– **b)** En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant N,\ 1 + \dfrac{\alpha - \varepsilon}{n} \leqslant u_n \leqslant 1 + \dfrac{\alpha + \varepsilon}{n}$.

Solution. Par convergence vers $\varphi(\alpha-\varepsilon)<1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant N_1, \quad f_n(1+\tfrac{\alpha-\varepsilon}{n})<1.$$

De même $\varphi(\alpha+\varepsilon)>1$, donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant N_2,\ f_n(1+\frac{\alpha+\varepsilon}{n})>1$. Posons $N=\max\{N_1,N_2\}$. Alors, pour tout $n \geqslant N$,

$$f_n(1+\tfrac{\alpha-\varepsilon}{n})<f_n(u_n)<f_n(1+\tfrac{\alpha+\varepsilon}{n}).$$

D'après les variations de f_n, cet encadrement implique $1+\frac{\alpha-\varepsilon}{n} \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{\alpha+\varepsilon}{n}$.

▶ **II.7** Établir finalement la convergence de la suite $\big(n(u_n-1)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution. Remarquons que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon>0$,

$$1+\tfrac{\alpha-\varepsilon}{n} \leqslant u_n \leqslant 1+\tfrac{\alpha+\varepsilon}{n} \iff \alpha-\varepsilon \leqslant n(u_n-1) \leqslant \alpha+\varepsilon.$$

La conclusion des questions précédentes s'exprime donc sous la forme :

$$\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant N, \quad |n(u_n-1)-\alpha| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, la suite $\big(n(u_n-1)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers le réel α.

III Trace et matrices symétriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
On pourra admettre, sans justification, la linéarité de tr.

▶ **III.1** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

– **a)** Exprimer $\operatorname{tr}(AA^T)$ en fonction des coefficients $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de la matrice A.

Solution. Pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\operatorname{tr}(AA^T)=\sum_{i=1}^{n}[AA^T]_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}[A^T]_{j,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2.$$

– **b)** En déduire, si A est symétrique, que $\operatorname{tr}(A^2) \geqslant 0$ avec égalité ssi A est nulle.

Solution. Supposons A symétrique. Alors $A^T = A$, donc $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(AA^T) \geqslant 0$ par somme des réels positifs $(a_{i,j}^2)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour les même raisons,

$$\mathrm{tr}(A^2) = 0 \iff \forall (i,j) \in [\![n,]\!]\, 2,\ a_{i,j}^2 = 0 \iff \forall (i,j) \in [\![n,]\!]\, 2,\ a_{i,j} = 0.$$

▶ **III.2** Soit M une solution de l'équation matricielle $MM^TM = I_n$.

– **a)** Montrer que M est inversible et que M^{-1} est symétrique.

Solution. Par hypothèse, $MM' = I_n$ en posant $M' = M^TM$. Par théorème $M'M = I_n$ donc M est inversible et $M^{-1} = M'$. Cette matrice est symétrique :

$$(M^TM)^T = M^T(M^T)^T = M^TM.$$

– **b)** En déduire que M et M^2 sont symétriques, puis donner la valeur de M^3.

Solution. On sait que $M^{-1} = (M^{-1})^T$.

- Ainsi, $M^{-1} = (M^T)^{-1}$ et finalement $M = M^T$ par passage à l'inverse.
- Alors, $(M^2)^T = M^TM^T = MM = M^2$ donc M^2 est symétrique aussi.
- Enfin, $MM^TM = I_n$, donc $M^3 = I_n$.

– **c)** Prouver que $\mathrm{tr}\left((M - I_n)^2\right) + \mathrm{tr}\left((M^2 - I_n)^2\right) + \mathrm{tr}\left((M^2 - M)^2\right) = 0$.

Solution. On développe les carrés sachant que les matrices M, M^2 et I_n commutent deux à deux. Puis on simplifie en utilisant les relations $M^3 = I_n$ et $M^4 = M$:

$$\begin{aligned}
(M - I_n)^2 &= M^2 - 2M + I_n \\
(M^2 - I_n)^2 &= M^4 - 2M^2 + I_n = M - 2M^2 + I_n \\
(M^2 - M)^2 &= (M^4 - 2M^3 + M^2) = M - 2I_n + M^2
\end{aligned}$$

Par somme, $(M - I_n)^2 + (M^2 - I_n)^2 + (M^2 - M)^2$ est la matrice nulle.
On conclut par linéarité de la trace.

– **d)** Démontrer finalement que $M = I_n$ est l'unique solution.

Solution. Les matrices $M - I_n$, $M^2 - I_n$ et $M^2 - M$ sont symétriques, donc les réels $\mathrm{tr}\left((M - I_n)^2\right)$, $\mathrm{tr}\left((M^2 - I_n)^2\right)$ et $\mathrm{tr}\left((M^2 - M)^2\right)$ sont positifs d'après la première partie de l'exercice. Et leur somme vaut 0 donc ils sont nécessairement nuls. Toujours d'après la première partie, il en découle en particulier que la matrice symétrique $M - I_n$ est nulle, c'est-à-dire que $M = I_n$.

Réciproquement, la matrice I_n vérifie bien $I_n(I_n)^T I_n = (I_n)^T = I_n$.

IV Limites et continuité

Soit τ un réel strictement positif. On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, solution de l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+\tau) - f(x) = \cos(x).$$

▶ **IV.1** Montrer que f n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

Solution. Supposons que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Alors $f(2\pi n) \to \ell$ et $f(2\pi n + \tau) \to \ell$ par caractérisation séquentielle, donc $f(2\pi n + \tau) - f(2\pi n) \to 0$. Mais c'est absurde car $f(2\pi n + \tau) - f(2\pi n) = \cos(2\pi n) = 1$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

▶ **IV.2** On suppose, dans cette question, que le réel τ n'est pas un multiple de 2π.
On considère $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $\dfrac{1}{e^{i\tau} - 1} = \rho e^{i\theta}$.

– **a)** Montrer qu'il existe h, une fonction τ-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \rho\cos(x+\theta) + h(x).$$

Solution. Posons $h(x) = f(x) - \rho\cos(x+\theta)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(x+\tau) - h(x) &= \cos(x) - \rho\cos(x+\tau+\theta) + \rho\cos(x+\theta) \\ &= \mathfrak{Re}\left[e^{ix} - \rho e^{ix+i\tau+i\theta} + \rho e^{ix+i\theta}\right] \\ &= \mathfrak{Re}\left[e^{ix} - e^{ix}\rho e^{i\theta}(e^{i\tau} - 1)\right] = 0, \end{aligned}$$

car $\rho e^{i\theta}(e^{i\tau} - 1) = 1$. La fonction h est donc τ-périodique.

– **b)** En déduire que, si f est une fonction continue, alors f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Solution. Supposons que f est continue. Alors h est continue aussi par combinaison linéaire de fonctions continues. Par restriction, $h|_{[0,\tau]}$ est continue sur le segment $[0, \tau]$. D'après le théorème des bornes (atteintes), h est donc bornée sur ce segment par un certain $K \in \mathbb{R}_+$. Mais alors, h reste bornée par K sur $\mathbb{R}$, par τ-périodicité.

Finalement, on montre donc que f est bornée à l'aide de l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant |\rho \cos(x+\theta)| + |h(x)| \leqslant \rho + K.$$

▶ **IV.3** On suppose, cette fois, que τ est un multiple de 2π.

– **a)** Étudier, pour tout réel a fixé, la suite $\big(f(a+n\tau)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a+(n+1)\tau) - f(a+n\tau) = \cos(a+n\tau) = \cos(a)$ car τ est multiple de 2π. Cette suite est donc arithmétique de raison $\cos(a)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(a+n\tau) = f(a) + n\cos(a).$$

– **b)** En déduire que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Solution. En posant $u_n = n\tau$, on aura $f(u_n) \to +\infty$ car $\cos(0) = 1$. De même, $v_n = \pi + n\tau$ entraîne $f(v_n) \to -\infty$ car $\cos(\pi) = -1$. Si f admettait une limite ℓ en $+\infty$, on devrait avoir $\ell = +\infty$ et $\ell = -\infty$ par caractérisation séquentielle.
On conclut par contraposée.

– **c)** Montrer que, si f est continue, tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinité d'antécédents par f.

Solution. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $N = \max\big\{\lfloor y - f(0)\rfloor,\ \lfloor f(\pi) - y\rfloor\big\} + 1$. Alors,

$$\forall n \geqslant N, \quad f(\pi) - n \leqslant y \leqslant f(0) + n \quad \text{i.e.} \quad f(\pi + n\tau) \leqslant y \leqslant f(0 + n\tau).$$

Quel que soit $n \geqslant N$, il existe donc $x_n \in [n\tau,\ n\tau + \pi]$ tel que $f(x_n) = y$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $f|_{[n\tau, n\tau+\pi]}$. Ces antécédents $(x_n)_{n\geqslant N}$ sont tous distincts car les intervalles $[n\tau, n\tau + \pi]$ sont disjoints deux à deux. En effet, $\tau > \pi$ car $\tau \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

V Produits dans un ensemble de matrices

On considère l'ensemble $\mathcal{H}$, constitué des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{où } (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3.$$

Notation. Étant donnée une matrice inversible M, on étend la notation puissance aux entiers négatifs en posant $M^{-k} = (M^{-1})^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

V.A Généralités

▶ **V.1** Soient $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ et $(x', y', z') \in \mathbb{Z}^3$. Calculer : $\begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & y' & z' \\ 0 & 1 & x' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution. En posant le calcul, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & y + y' & z + z' + x'y \\ 0 & 1 & x + x' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

▶ **V.2** Montrer que tout élément de $\mathcal{H}$ est une matrice inversible, et calculer son inverse.

Solution. Étant donné $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, posons $x' = -x$, $y' = -y$ et $z' = xy - z$. Alors $x + x' = 0$, $y + y' = 0$ et $z + z' + x'y = 0$, donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & y' & z' \\ 0 & 1 & x' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Par théorème, on en déduit que ces matrices sont inversibles et que :

$$\begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -y & xy - z \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V.B Puissances et produits

On considère les trois éléments de $\mathcal{H}$ suivants :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

▶ **V.3** Soit $M \in \mathcal{H}$. Montrer que $(M - I_3)^3$ est nulle. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution. Posons $N = M - I_3$.

- On dipose de $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ tels que :

$$M=\begin{pmatrix}1 & y & z\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0 & y & z\\ 0 & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

  Par produit matriciel, il vient alors :

$$N^2=N\times N=\begin{pmatrix}0 & y & z\\ 0 & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & y & z\\ 0 & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & yx\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

  puis finalement $N^3=N^2\times N=0$.

- On sait que $M=N+I_3$, où N commute avec I_3. Soit $n\in\mathbb{N}$. En appliquant la formule du binôme de Newton, on a :

$$(N+I_3)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k(I_3)^{n-k}.$$

  Puisque $N^3=0$, tous les termes où l'exposant de N est $k\geqslant 3$ sont nuls :

$$\begin{aligned}M^n&=\binom{n}{0}N^0I_3^n+\binom{n}{1}N^1I_3^{n-1}+\binom{n}{2}N^2I_3^{n-2}\\ &=I_3+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2=\begin{pmatrix}1 & ny & nz+\frac{n(n-1)}{2}xy\\ 0 & 1 & nx\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

▶ **V.4** Déterminer X^n, Y^n et Z^n pour tout n entier *relatif*.

Solution. Soit $n\in\mathbb{N}$. En prenant les matrices X et X^{-1} ci-dessus, on obtient :

$$X^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ (X^{-1})^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

De même avec Y et Z. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

▶ **V.5** Montrer alors que tout élément de $\mathcal{H}$ s'exprime sous la forme $X^a Y^b Z^c$, pour un unique triplet (a, b, c) d'entiers relatifs.

Solution. D'après les questions précédentes, quel que soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} X^a Y^b Z^c &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Étant donné $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ fixé, on aura donc un unique triplet (a, b, c) solution :

$$\begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X^a Y^b Z^c \iff (x, y, z) = (a, b, c).$$

V.C Questions de commutativité

▶ **V.6** Montrer que les éléments A de $\mathcal{H}$ qui commutent avec tous les éléments M de $\mathcal{H}$ (c'est-à-dire que : $\forall M \in \mathcal{H},\ AM = MA$) sont exactement les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{où } z \in \mathbb{Z}.$$

Solution. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{H}$, pour un certain $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.

- Supposons que A commute avec tout élément de $\mathcal{H}$:

$$\forall (x',y',z') \in \mathbb{Z}^3, \quad A \times \begin{pmatrix} 1 & y' & z' \\ 0 & 1 & x' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y' & z' \\ 0 & 1 & x' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times A.$$

  D'après les première questions, ceci équivaut à :

$$\forall (x',y',z') \in \mathbb{Z}^3, \quad \begin{cases} x = x' = x' + x \\ y + y' = y' + y \\ z + z' + x'y = z' + z + xy' \end{cases} \qquad \text{(i.e. } x'y = xy' \text{).}$$

  Pour $(x',y',z') = (1,0,0)$ en particulier, ceci donne $1 \times y = x \times 0$. D'où $y = 0$. On obtient de même $x = 0$ en prenant $(x',y',z') = (0,1,0)$.

- Réciproquement, A vérifie clairement la condition si $x = 0$ et $y = 0$.

▶ **V.7** Montrer que $XYX^{-1}Y^{-1} = Z^{-1}$.

Solution. D'après les calculs déjà faits :

$$XYX^{-1}Y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Z^{-1}.$$

▶ **V.8** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y^n\, X = X\, Y^n\, Z^n$.

Solution. On raisonne par récurrence, la relation $Y^0X = XY^0Z^0$ étant trivialement vraie car $X = X$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Y^n\, X = X\, Y^n\, Z^n$. En multipliant à gauche :

$$Y^{n+1}X = YXY^nZ^n = (YXY^{-1}X^{-1})(XY)(Y^nZ^n).$$

Or $YXY^{-1}X^{-1} = (Z^{-1})^{-1} = Z$ et Z commute avec tout élément de $\mathcal{H}$, donc :

$$Y^{n+1}X = ZXY^{n+1}Z^n = XY^{n+1}Z^{n+1}.$$

Remarque. Un autre possibilité était de vérifier explicitement l'égalité entre $Y^n\, X$ et $X\, Y^n\, Z^n$ avec les résultats de la deuxième partie.

V.D Nombre de produits distincts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\mathcal{A}(n)$ l'ensemble de toutes les matrices qui s'expriment comme un produit $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ de n éléments $M_i \in \{X, Y\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
On cherche à estimer le nombre d'éléments distincts de $\mathcal{A}(n)$, noté $|\mathcal{A}(n)|$.

▶ **V.9** Comparer $YXXY$ et $XYYX$. En déduire que $|\mathcal{A}(n)| < 2^n$ lorsque $n \geqslant 4$.

Solution.

- D'après la question précédente $YX = XYZ$, donc $YXXY = XYZXY$ et $XYYX = XYXYZ$. Puisque Z commute avec tout élément de $\mathcal{H}$, on en déduit que $YXXY = XYYX$.
- Tout élément de $\mathcal{A}(n)$ est associé à un n-uplet $(M_1, \ldots, M_n) \in \{X, Y\}^n$. Donc $|\mathcal{A}(n)|$ est majoré par 2^n, le nombre d'éléments de $\{X, Y\}^n$. Si $|\mathcal{A}(n)| = 2^n$, tout élément de $\mathcal{A}(n)$ est associé à un unique n-uplet. Mais ceci est faux lorsque $n \geqslant 4$ car on a déjà $YXXY = XYYX$. Donc $|\mathcal{A}(n)| < 2^n$.

▶ **V.10** Démontrer que les éléments A de $\mathcal{A}(n)$ sont exactement les $A = X^a Y^b Z^c$ où a, b, c sont des entiers naturels tels que $a + b = n$ et $c \leqslant ab$.

Solution. Raisonnons par récurrence, l'initialisation étant triviale pour $n = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathcal{A}(n) = \left\{ X^a Y^b Z^c \mid (a, b, c) \in \mathbb{N}^3,\ a + b = n,\ c \leqslant ab \right\}.$$

Les éléments de $\mathcal{A}(n+1)$ les matrices $A \times M_{n+1}$ où $A \in \mathcal{A}(n)$ et $M_{n+1} \in \{X, Y\}$.
Première inclusion. Soit $A = X^a Y^b Y^c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ vérifie $a + b = n$ et $c \leqslant ab$.

- Dans le cas $M_{n+1} = X$, on peut réécrire le produit :

$$A \times M_{n+1} = X^a (Y^b X) Z^c = X^a (X Y^b Z^b) Z^c = X^{a'} Y^{b'} Z^{c'}.$$

  où $a' = a + 1$, $b' = b$ et $c' = c + b$ vérifient bien $a' + b' = n + 1$ et $c' \leqslant a'b'$.
- Dans le cas $M_{n+1} = Y$, on obtient $A \times M_{n+1} = X^a (Y^b Y) Z^c = X^{a'} Y^{b'} Z^{c'}$, où $a' = a$, $b' = b + 1$ et $c' = c$, vérifient aussi $a' + b' = n + 1$ et $c' \leqslant a'b'$.

Par disjonction de cas, ceci permet déjà de prouver l'*inclusion directe* :

$$\mathcal{A}(n+1) \subset \left\{ X^{a'} Y^{b'} Z^{c'} \mid (a', b', c') \in \mathbb{N}^3,\ a' + b' = n + 1,\ c' \leqslant a'b' \right\}.$$

Inclusion réciproque. Soit $(a', b', c') \in \mathbb{N}^3$ tel que $a' + b' = n + 1$ et $c' \leqslant a'b'$.

- Si $a' = 0$, alors $c' = 0$ nécessairement donc $(a', b', c') = (0, n + 1, 0)$ et

$$X^{a'} Y^{b'} Z^{c'} = Y^{n+1} = \underbrace{Y \times \cdots \times Y}_{n+1 \text{ facteurs}} \in \mathcal{A}(n + 1).$$

- Si $a' \geqslant 1$ et $b' \geqslant c'$, on peut réécrire le produit (Z commute avec tout élément) :

$$X^{a'} Y^{b'} Z^{c'} = X^{a'-1}(XY^{c'} Z^{c'})Y^{b'-c'} = \underbrace{X^{a'-1}(Y^{c'} X)Y^{b'-c'}}_{n+1 \text{ facteurs}} \in \mathcal{A}(n + 1).$$

- Si $a' \geqslant 1$ et $b' < c'$, on pose $(a, b, c) = (a' - 1, b', c' - b')$. Alors $A = X^a Y^b Z^c$ est un élément de $\mathcal{A}(n)$ par hypothèse de récurrence, car $a + b = a' + b' - 1 = n$ et $c = c' - b' \leqslant a'b' - b' = ab$. D'après les calculs précédents,

$$X^{a'} Y^{b'} Z^{c'} = A \times X \in \mathcal{A}(n + 1).$$

Par double inclusion, on obtient donc l'égalité voulue pour $\mathcal{A}(n + 1)$.

► **V.11** En déduire finalement que : $|\mathcal{A}(n)| = \dfrac{n^3}{6} + \dfrac{5n}{6} + 1$.

Solution. Ceci revient à calculer le nombre de triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + b = n$ et $c \leqslant ab$. En fixant la valeur de a à un certain entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on aura nécessairement $b = n - k$, puis exactement $k(n - k) + 1$ possibilités pour c. Par union disjointe, le nombre total de triplets qui sont solutions est donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} [k(n - k) + 1] &= n \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n + 1) \\ &= \frac{n^2(n + 1)}{2} - \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1) \\ &= \frac{n^3}{6} + \frac{5n}{6} + 1.\end{aligned}$$