Cinquième devoir surveillé

le 27 janvier 2024, de 8h00 à 12h00

La calculatrice est interdite. La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

I Échauffement

▶ **I.1** Étudier la monotonie, puis la limite éventuelle, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

▶ **I.2** Montrer que la matrice A suivante est inversible, et calculer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II Convergence de suites

À tout n entier naturel non nul, on associe la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\, x^{n+1} - (n+1)\, x^n.$$

On note alors u_n l'unique solution positive de l'équation $f_n(x) = 1$. Le but de l'exercice est d'étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

▶ **II.1** *Préliminaire.* Démontrer que, pour tout λ réel, $\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\lambda}$.

▶ **II.2** Déterminer la valeur de u_1.

▶ **II.3** Soit n un entier naturel non nul.

– **a)** Dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $[0, +\infty[$.

– **b)** En déduire l'existence d'une unique solution sur $[0,+\infty[$ pour l'équation $f_n(x)=1$.

– **c)** Démontrer l'encadrement : $1+\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{2}{n}$.

▶ **II.4** Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

▶ **II.5** Dresser le tableau de variation de la fonction $\varphi : x \mapsto e^x(x-1)$ sur $\mathbb{R}$. Prouver l'existence d'un réel $\alpha \in]1,2[$ tel que $\varphi < 1$ sur $]-\infty,\alpha[$ et $\varphi > 1$ sur $]\alpha,+\infty[$.

▶ **II.6** Soit ε un réel strictement positif.

– **a)** Que valent $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(1+\frac{\alpha-\varepsilon}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(1+\frac{\alpha+\varepsilon}{n}\right)$?

– **b)** En déduire qu'il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant N,\ 1+\dfrac{\alpha-\varepsilon}{n} \leqslant u_n \leqslant 1+\dfrac{\alpha+\varepsilon}{n}$.

▶ **II.7** Établir finalement la convergence de la suite $\big(n(u_n-1)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

III Trace et matrices symétriques

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\operatorname{tr}(A)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
On pourra admettre, sans justification, la linéarité de tr.

▶ **III.1** Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

– **a)** Exprimer $\operatorname{tr}(AA^T)$ en fonction des coefficients $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de la matrice A.

– **b)** En déduire, si A est symétrique, que $\operatorname{tr}(A^2)\geqslant 0$ avec égalité ssi A est nulle.

▶ **III.2** Soit M une solution de l'équation matricielle $MM^TM = I_n$.

– **a)** Montrer que M est inversible et que M^{-1} est symétrique.

– **b)** En déduire que M et M^2 sont symétriques, puis donner la valeur de M^3.

– **c)** Prouver que $\operatorname{tr}\left((M-I_n)^2\right)+\operatorname{tr}\left((M^2-I_n)^2\right)+\operatorname{tr}\left((M^2-M)^2\right)=0$.

– **d)** Démontrer finalement que $M=I_n$ est l'unique solution.

IV Limites et continuité

Soit τ un réel strictement positif. On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, solution de l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x+\tau)-f(x)=\cos(x).$$

▶ **IV.1** Montrer que f n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

▶ **IV.2** On suppose, dans cette question, que le réel τ n'est pas un multiple de 2π.
On considère $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $\dfrac{1}{e^{i\tau}-1} = \rho e^{i\theta}$.

– **a)** Montrer qu'il existe h, une fonction τ-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \rho \cos(x+\theta) + h(x).$$

– **b)** En déduire que, si f est une fonction continue, alors f est bornée sur $\mathbb{R}$.

▶ **IV.3** On suppose, cette fois, que τ est un multiple de 2π.

– **a)** Étudier, pour tout réel a fixé, la suite $\big(f(a+n\tau)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

– **b)** En déduire que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

– **c)** Montrer que, si f est continue, tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinité d'antécédents par f.

V Produits dans un ensemble de matrices

On considère l'ensemble $\mathcal{H}$, constitué des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{où } (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3.$$

Notation. Étant donnée une matrice inversible M, on étend la notation puissance aux entiers négatifs en posant $M^{-k} = (M^{-1})^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

V.A Généralités

▶ **V.1** Soient $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ et $(x',y',z') \in \mathbb{Z}^3$. Calculer : $\begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & y' & z' \\ 0 & 1 & x' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

▶ **V.2** Montrer que tout élément de $\mathcal{H}$ est une matrice inversible, et calculer son inverse.

V.B Puissances et produits

On considère les trois éléments de $\mathcal{H}$ suivants :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

▶ **V.3** Soit $M \in \mathcal{H}$. Montrer que $(M - I_3)^3$ est nulle. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▶ **V.4** Déterminer X^n, Y^n et Z^n pour tout n entier *relatif*.

▶ **V.5** Montrer alors que tout élément de $\mathcal{H}$ s'exprime sous la forme $X^a Y^b Z^c$, pour un unique triplet (a, b, c) d'entiers relatifs.

V.C Questions de commutativité

▶ **V.6** Montrer que les éléments A de $\mathcal{H}$ qui commutent avec tous les éléments M de $\mathcal{H}$ (c'est-à-dire que : $\forall M \in \mathcal{H},\ AM = MA$) sont exactement les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{où } z \in \mathbb{Z}.$$

▶ **V.7** Montrer que $XYX^{-1}Y^{-1} = Z^{-1}$.

▶ **V.8** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ Y^n X = X Y^n Z^n$.

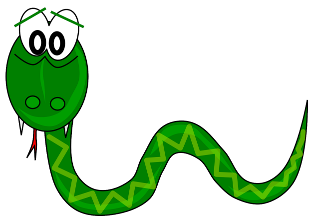
V.D Nombre de produits distincts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\mathcal{A}(n)$ l'ensemble de toutes les matrices qui s'expriment comme un produit $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ de n éléments $M_i \in \{X, Y\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
On cherche à estimer le nombre d'éléments distincts de $\mathcal{A}(n)$, noté $|\mathcal{A}(n)|$.

▶ **V.9** Comparer $YXXY$ et $XYYX$. En déduire que $|\mathcal{A}(n)| < 2^n$ lorsque $n \geqslant 4$.

▶ **V.10** Démontrer que les éléments A de $\mathcal{A}(n)$ sont exactement les $A = X^a Y^b Z^c$ où a, b, c sont des entiers naturels tels que $a + b = n$ et $c \leqslant ab$.

▶ **V.11** En déduire finalement que : $\quad |\mathcal{A}(n)| = \dfrac{n^3}{6} + \dfrac{5n}{6} + 1.$



FIN