Sixième devoir surveillé

le 2 mars 2024, de 8h30 à 11h30

La calculatrice est interdite. La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

I Exercice

Soient a, b deux entiers naturels non nuls tels que : $a + b = 144$ et $\mathrm{PPCM}(a, b) = 420$.

▶ **I.1** Quelles sont les décompositions en facteurs premiers de 144 et 420 ?

▶ **I.2** Montrer que a et b sont divisibles par 12.

▶ **I.3** En déduire le PGCD de a et b.

▶ **I.4** Déterminer finalement toutes les solutions pour le couple (a, b).

II Exercice

▶ **II.1** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{2x} + 1}$.

– **a)** Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ est stable par f.

– **b)** Montrer que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, atteint en un réel $\ell \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

– **c)** Montrer que, pour tout x réel positif, $0 \leqslant |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

▶ **II.2** Soit (u_n) telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) tend vers ℓ.

▶ **II.3** On pose $P = (X^2 - 1)^2 - 4X^2$.

– **a)** Décomposer P en facteur irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

– **b)** Étudier la convexité de f sur $\left[\ln(\sqrt{2} - 1),\ \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$.

– **c)** Montrer que : $\quad \forall x \in [0, \ell], \quad |f(x) - \ell| \geqslant \left(\dfrac{1}{2\ell} - 1\right)|\ell - x|$.

III Problème

Le thème du problème est l'étude de quelques aspects d'une famille remarquable de polynômes. On établira notamment deux théorèmes importants, dus respectivement à Tchebychev et à Bernstein, dans les parties B et C.
La partie A est consacrée à la définition des polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et à leurs premières propriétés. On prouvera en particulier qu'ils vérifient la propriété caractéristique :

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\quad T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)}. \tag{$\heartsuit$}$$

On montrera aussi que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} si $n \geqslant 1$.
À l'exception de ces propriétés, qui serviront régulièrement mais qu'on pourra admettre dans la suite, les parties A, B et C sont entièrement indépendantes.

Notations et vocabulaire Pour tout réel x, on note $\lfloor x\rfloor$ sa partie entière. Pour tout $d\in\mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré *inférieur ou égal* à d. Un polynôme est dit *unitaire* lorsque son coefficient dominant est égal à 1.

III.A Généralités

À tout entier $n\in\mathbb{N}$, on associe le polynôme : $\displaystyle T_n=\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}X^{n-2p}(X^2-1)^p$.

▶ **III.1** Simplifier les polynômes T_0, T_1 et T_2.

▶ **III.2** Soit n un entier naturel.

– **a)** Déterminer le degré du polynôme T_n.

– **b)** Démontrer que le polynôme T_n vérifie la propriété caractéristique ($\heartsuit$).
Indication : considérer la partie réelle du nombre complexe $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$.

– **c)** Montrer que T_n est le seul polynôme qui vérifie cette condition ($\heartsuit$).

▶ **III.3** *Relation de récurrence.*

– **a)** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ T_{n+2}=2X\,T_{n+1}-T_n$.
Indication : factoriser $T_{n+2}(\cos\theta)+T_n(\cos\theta)$ pour $\theta\in\mathbb{R}$.

– **b)** Retrouver T_2 à l'aide de cette relation, puis calculer T_3.

– **c)** Déterminer le coefficient dominant du polynôme T_n.

▶ **III.4** *Racines.* Soit $n\geqslant 1$. Pour tout $k\in\{0,\dots,n-1\}$, on pose $\theta_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

– **a)** Démontrer que : $\quad T_n = 2^{n-1} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - \cos\theta_k)$.

– **b)** En déduire, en fonction de n, les valeurs des produits :

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right). \quad \text{et} \quad B_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right).$$

III.B Plus petit maximum

L'objectif de cette partie est d'établir le théorème suivant.

> **Théorème de Tchebychev.** *Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire et de degré $n \geqslant 1$, vérifie l'inégalité suivante :*
>
> $$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \textit{avec égalité si et seulement si } P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n.$$

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on pose $c_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

▶ **III.5** Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\|P\| = \displaystyle\max_{x\in[-1,1]} |P(x)|$.

– **a)** Justifier l'existence de ce maximum sur l'intervalle $[-1, 1]$.

– **b)** Déterminer $\|T_n\|$ et montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ T_n(c_k) = (-1)^k \|T_n\|$.

– **c)** Tracer l'allure de la fonction $x \mapsto T_3(x)$, en plaçant les abscisses c_0, c_1, c_2, c_3.

▶ **III.6** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme, de degré n et unitaire, tel que : $\|P\| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

– **a)** On fixe un réel $\varepsilon > 0$. Étudier le signe de $(1+\varepsilon)T_n(c_k) - 2^{n-1}P(c_k)$ en fonction de $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. En déduire qu'il existe $x_1^\varepsilon, \ldots, x_n^\varepsilon$ éléments de $]-1, 1[$, tels que :

$$(1+\varepsilon)T_n - 2^{n-1}P = \varepsilon\, 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (X - x_k^\varepsilon).$$

– **b)** Prouver alors, pour tout $x \in [-1, 1]$, l'égalité $T_n(x) - 2^{n-1}P(x) = 0$.

▶ **III.7** Démontrer finalement le théorème de Tchebychev.

III.C Inégalités sur les dérivées

▶ **III.8** On cherche à prouver l'inégalité $|\sin(n\theta)| \leqslant n \sin\theta$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

– **a)** Montrer déjà que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right],\ \sin(n\theta) \leqslant n \sin\theta$.

– **b)** Montrer, par un argument de « convexité », que : $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin(\theta) \geqslant \frac{2}{\pi}\,\theta$.

– **c)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que : $\forall \theta \in \left[\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}\right],\ 1 \leqslant n \sin\theta$.

– **d)** Conclure.

▶ **III.9** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\max_{x\in[-1,1]} |T_n'(x)| = n^2$.

▶ **III.10** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On classe les n racines $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ du polynôme T_n par ordre croissant, en posant $\alpha_k = \cos\left(\dfrac{(2(n-j)+1)\pi}{2n}\right)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

– **a)** On pose $D = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Établir la décomposition en éléments simples :

$$\forall x \in D, \quad \frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_j}.$$

– **b)** Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que : $\quad \forall x \in D, \quad P(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{P(\alpha_j)}{T_n'(\alpha_j)} \frac{T_n(x)}{x - \alpha_j}$.

– **c)** En déduire que : $\quad \forall x \in D, \quad P(x) = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \sqrt{1-\alpha_j^2}\, P(\alpha_j) \frac{T_n(x)}{x - \alpha_j}$.

▶ **III.11** Soient n un entier naturel non nul et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

– **a)** Montrer que : $\forall x \in [\alpha_1, \alpha_n],\ \sqrt{1-x^2} \geqslant \dfrac{1}{n}$.

– **b)** Montrer que, si $\displaystyle\max_{x\in[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,|P(x)| \leqslant 1$, alors $\displaystyle\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant n$.
Indication : distinguer trois cas, selon que $x < \alpha_1$, $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_n$ ou $\alpha_n < x$.

– **c)** En déduire que : $\quad \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \displaystyle\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant n \max_{x\in[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,|P(x)|$.

▶ **III.12** Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. On note f la fonction, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(k\theta).$$

– **a)** Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\quad \forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = P(\cos\theta)\sin\theta$.
Indication : construire P à l'aide des polynômes $T_1, \ldots, T_n$.

– **b)** Justifier que $|f|$ admet un maximum et que : $\displaystyle\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant n \max_{\theta\in\mathbb{R}} |f(\theta)|$.

– **c)** En déduire *l'inégalité de Bernstein* : $\quad |f'(0)| \leqslant n \displaystyle\max_{\theta\in\mathbb{R}} |f(\theta)|$.