Huitième devoir surveillé

le 30 avril 2024, de 8h00 à 10h45

La calculatrice est interdite. La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

I Exercice [temps conseillé : 30 min]

Soient un entier $n \geqslant 1$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $3n$.
On considère un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang $2n$.

▶ **I.1** Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker} f$.

On pose $g = f|_{\operatorname{Im} f}$ l'application linéaire de $\operatorname{Im} f$ dans E définie par restriction de f au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$.

▶ **I.2** Montrer que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f^2$ et que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.

▶ **I.3** En déduire que $\operatorname{rg} f^2 \geqslant n$.

▶ **I.4** *On suppose désormais que $f^3 = 0$ dans $\mathscr{L}(E)$.*

– **a)** Comparer les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f^2$ et $\operatorname{Ker} f$, puis déterminer $\operatorname{rg} f^2$.

– **b)** Montrer qu'il existe une famille libre $(u_1, \ldots, u_n)$ de E telle que

$$\operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = E.$$

– **c)** Montrer que la famille suivante est une base de E :

$$\big(u_1, \ldots, u_n, f(u_1), \ldots, f(u_n), f^2(u_1), \ldots, f^2(u_n)\big).$$

II Exercice [temps conseillé : 20 min]

Soit f une fonction continue de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_0^\pi \cos(t) f(t)\, dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \sin(t) f(t)\, dt = 0.$$

▶ **II.1** Montrer qu'il existe un élément $x_1 \in]0, \pi[$ tel que $f(x_1) = 0$.

▶ **II.2** Déterminer, pour tout réel α, la valeur de l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_0^\pi \sin(t - \alpha) f(t)\, dt.$$

▶ **II.3** En déduire qu'il existe $x_2 \in]0, \pi[$, distinct de x_1, tel que $f(x_2) = 0$.

III Exercice [temps conseillé : 30 min]

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble $\mathcal{B}_n$ de toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{i,j} \in \{0, 1\}.$$

▶ **III.1** Quel est le cardinal de $\mathcal{B}_n$?

▶ **III.2** Déterminer le cardinal de $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{S}_n$.

▶ **III.3** Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des $A \in \mathcal{B}_n \cap \mathcal{S}_n$ telles que chaque ligne (et chaque colonne) contient un unique coefficient égal à 1. On note u_n le cardinal de $\mathcal{E}_n$, avec $u_0 = 1$ par convention.

– **a)** Déterminer u_1, u_2 et u_3.

– **b)** Soit $n \geqslant 2$. Déterminer, en fonction de u_{n-1} et u_{n-2},

- le nombre d'éléments $A \in \mathcal{E}_n$ tels que $a_{n,n} = 1$;
- le nombre d'éléments $A \in \mathcal{E}_n$ tels que $a_{n,n} = 0$;

– **c)** En déduire la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1) u_n.$$

IV Exercice [temps conseillé : 1h10]

Pour tout réel x, on pose :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 e^{-(1+u^2)x^2}\,\mathrm{d}u.$$

▶ **IV.1** Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

▶ **IV.2** Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f'(x)$ sous la forme d'une intégrale puis vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x\,g(x).$$

L'idée générale dans les questions suivantes sera d'approcher $g(x)$ par des sommes puis, en intégrant, d'en déduire une approximation de $f(x)$ elle-même.

▶ **IV.3** À tout entier $n \geqslant 1$, on associe :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

▶ **IV.4** *Approximation de g.* À tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x, on associe :

$$g_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-(1+(k/n)^2)x^2}.$$

– **a)** Soit un entier $n \geqslant 1$. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout réel x,

$$\frac{1}{n}e^{-(\frac{k}{n})^2x^2} \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} e^{-(ux)^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{n}e^{-(\frac{k-1}{n})^2x^2}$$

– **b)** En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x :

$$g_n(x) \leqslant g(x) \leqslant g_n(x) + \frac{e^{-x^2}}{n}.$$

▶ **IV.5** *Approximation de f.* Soit x un réel positif. À tout entier $n \geqslant 1$, on associe :

$$f_n(x) = \int_0^x 2t g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

– **a)** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \int_0^x 2t\,|g(t) - g_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f_n(x) - S_n| \leqslant e^{-x^2}.$$

– **b)** En déduire que, pour tout réel positif x,

$$\left| f(x) - \frac{\pi}{4} \right| \leqslant e^{-x^2}.$$

▶ **IV.6** Calculer finalement la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

V Exercice [temps conseillé : 15 min]

Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

▶ **V.1** On suppose dans cette question que $I_n \notin \mathcal{H}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^2 = 0$.

– **a)** Justifier qu'il existe $H \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ uniques tels que $M = H + \lambda I_n$.

– **b)** Montrer que $M \in \mathcal{H}$ si, et seulement si, H n'est pas inversible.

▶ **V.2** En déduire que $\mathcal{H}$ contient au moins une matrice inversible.